

CÁLCULO DIFERENCIAL

ALBERTO CAMACHO





CÁLCULO DIFERENCIAL

ALBERTO CAMACHO
Instituto Tecnológico de Chihuahua II (ITCh II)
México

CÁLCULO DIFERENCIAL



Madrid • México • Buenos Aires • Bogotá

Ediciones Díaz de Santos
E-mail: ediciones@diazdesantos.es
Internet://http:www.diazdesantos.es

ISBN: 978-84-7978-892-6
Depósito legal: M. 50305-2008

Diseño de cubierta: Ángel Calvete
Fotocomposición e impresión: Fernández Ciudad
Impreso en España
Encuadernación: Rústica - Hilo



Dedico el presente trabajo a mis padres:
doña Elvira Ríos (q.e.p.d.) y don Juan Camacho.

Agradecimientos

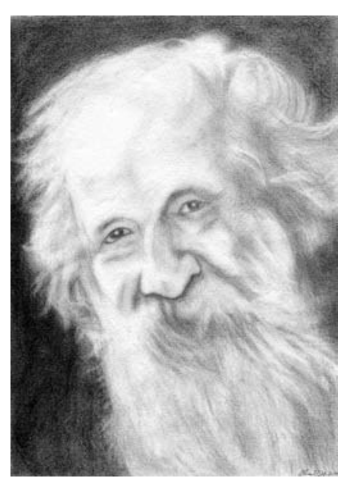
Varios de las fotografías e inserciones de fragmentos de texto pertenecen al dominio público, en ese sentido es difícil seguir la huella de los herederos de los autores a quien se debiera pedir el permiso de uso de los mismos.

1. Los oleos de Francisco Díaz Covarrubias y Gabino Barreda pertenecen al Colegio de San Ildefonso, el segundo fue realizado por el pintor Juan Cordero, ambos, junto con otros, se encuentran en el colegio en salón conocido como el *Generalito.*
2. El retrato de Gaston Bachellard es un diseño Maria Elisa Cabral. Se encuentra en el *Centre Bachellard* y en la ruta http://www.u-bourgogne.fr/CENTRE-BACHELARD.
3. La cita de Francisco Díaz Covarrubias, que aparece en el capítulo 1, fue tomada de su libro de cálculo llamado *Análisis Trascendente* publicado por F. R Castañeda y L. G. Rodríguez en 1873, tomado de una edición que posee el autor.
4. La cita de G. Barreda, del teorema que aparece al inicio del capítulo 3, aparece en el documento llamado: *Examen del Cálculo Infinitesimal bajo el punto de vista lógico.* Fue escrito por Barreda aproximadamente en 1870, y aparecido en la 3.ª edición de la Revista Positiva. Tipografía Económica, México 1908.
5. La figura 2.11, gráfica de una parábola diseñada por B. Bails, que aparece en la página 67, se encuentra en el texto llamado *Principios Matemáticos*, editado por la Viuda de Ibarra en Madrid en 1789, de una edición que posee el autor.
6. La portada del libro de texto llamado *Cálculo Infinitesimal* de F. Echeagaray, así como la cita (se aprecia al inicio del capítulo 2) fueron tomadas de la edición de 1897, de una edición de la obra que posee el autor.
7. La tabla física 2.2, p. 50, fue tomada del libro de Humboldt, llamado *Essai sur la géographie des plantes,* de la edición de Levrault, Shoell et Compagnie, 1805. De una edición de la obra que posee el autor.
8. Las fotografías de Alberto Barajas (en la introducción), Sotero Prieto (al inicio del capítulo 5) y Alfonso Nápoles (al iniciar el capítulo 6) pertenecen a la UNAM, se encuentran en la ruta http://www.matmov.unam.mx.
9. La portada del texto llamado *Curso abreviado de análisis* (Véase al inicio del capítulo 4) fue tomada de la edición de 1912, escrita por Arturo Lamadrid, de una edición de la obra que posee el autor.
10. El fragmento del texto de *Historia de las matemáticas* escrito por Sotero Prieto fue editado por el Instituto Mexiquense de la Cultura en 1991, véase al inicio del capítulo 5. Fue tomado de una edición de la obra que posee el autor.
11. El fragmento de la página 145 del *Analyse des infiniment petits* de L´Hôpital, escrito en 1696, fue tomado de una edición de la obra que posee el autor.
12. El fragmento de la página 341 del desarrollo de una función en serie colocada en el *Teatrise* de MacLaurin, fue tomada de la primera edición de la *Encyclopædia Británica* publicada en 1771.

ÍNDICE

Parte II. DERIVADAS, APLICACIONES DE LA DERIVADA, SERIES Y SUCESIONES

PREFACIO



GASTON BACHELARD (1884-1962)
Diseño de Maria Elisa Cabral, a partir de un retrato de Gaston Bachelard

«No ocurría lo mismo durante el periodo pre-científico del siglo XVIII. Entonces el libro de ciencia era bueno o malo. No estaba *controlado por la enseñanza oficial.*»

G. BACHELARD, *Epistémologie*

Hace unos meses escribí un artículo en el que deje ver cómo los autores de libros de texto de cálculo infinitesimal de los siglos XVIII y XIX, hicieron uso de recursos poco ortodoxos (nada semejantes a los actuales) para orientar y dar estructura metodológica a la escritura de sus obras [1]. La idea central que se observa con regularidad, en un buen número de documentos de los que hice análisis, es una *síntesis* que hacían los autores de las nociones principales de la matemática, como aquella de *cantidad*, *diferencial*, *infinito, cero,* entre otras, que les daba para determinar una primera *proposición sintética*, con la cual era posible iniciar la escritura de su obra.

Esta característica fue fundamental en la ciencia; así, en los *Principia* de Newton, él sintetizó la noción de cantidad definiéndola como aquello que *aumenta y disminuye,* agregándole la siguiente proposición: *con movimiento uniforme.* Algo semejante hizo Eu-

[1] Camacho, A. (2005): Sistemas Sintéticos. Síntesis de Conocimiento en los Manuales para la Enseñanza Cinta de Moebio. *Revista Electrónica de Epistemología de Ciencias Sociales*. Universidad de Chile 2005, n.º 22, marzo. Primer documento de la revista. http://www.moebio.uchile.cl/22/index.htm.

Camacho, A. (2007): Sistemas Sintéticos. Síntesis de Conocimiento en los Manuales para la Enseñanza. En R. Cantoral, O. Covián, R. Farfán, J. Lezama y A. Romo (Eds.), *Investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: Un reporte Iberoamericano* (pp. 471-492). México DF, México: Díaz de Santos-Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A.C.

ler en sus *Principles de calcul;* L´Hôpital en el *Analyse des infiniment petits,* etc. En la enseñanza, la síntesis favoreció obras como *Traité du calcul différéntiel et integral de* Lacroix, los *Principios de cálculo infinitesimal* de Bèzout y, para la enseñanza del cálculo en México, el *Análisis trascendental* de Francisco Díaz Covarrubias. No obstante, la actividad de síntesis de obras científicas tuvo un clímax que culminó a finales del siglo XIX.

En la actualidad, los argumentos de síntesis de conocimientos para dar estructura a los libros de texto no tienen importancia, e incluso son desconocidos por aquellos que se han dedicado a su escritura a lo largo del siglo XX y lo que va del presente. No obstante, estas ideas se encuentran diluidas en los propios conceptos, como es el caso de la derivada y el límite. Consecuentemente, los problemas que hoy los autores abordan para el diseño de nuevas obras son de carácter didáctico, y tienen que ver más con los problemas de aprendizaje por parte de los estudiantes, a quienes se dirige el conocimiento.

Ante ello, el enfoque que he dado al presente libro es el de colocar diferentes *significados* en los conceptos más importantes del curso de Cálculo Diferencial, como son el de derivada, límite, función, etc., que considero pueden mejorar el entendimiento de los estudiantes. En este rubro, mi punto de vista es que el *conocimiento significativo* no solamente se refiere a la parte fenoménica que modela el saber, como comúnmente algunos le consideran, sino las diferentes *caras* o imágenes que el propio conocimiento a adquirido a lo largo de su definición. De esta forma, planteo el concepto de función desde nociones cercanas a ésta, poco consideradas por otros autores, como son las de *variable, variación* y *variabilidad,* sin dejar de lado sus significados ya conocidos de *fórmula, dependencia, modelo, gráfica,* etc. Para el concepto de límite he agregado a sus definiciones comunes la noción de *tolerancia*, que se usa comúnmente en los cursos de ingeniería, la cual sirve de puente para entender su definición formal a través de las cantidades épsilon y delta. De la misma manera, la definición de *sistema orgánico,* en el segundo capítulo, permite una mejor comprensión de las funciones exponencial y logarítmica. En lo que se refiere a la derivada, consigno para su definición imágenes cercanas a ésta, como son las de *diferencia* y *diferencial.*

Para dar definición a los argumentos fundamentales he usado la regla que llamo *ecuación de variaciones:* $f(x + \Delta x) = f(x) + f'(x)\Delta x + B(\Delta x)^2 + C(\Delta x)^3 + \ldots$ como eje central que estructura la totalidad del texto.

El segundo capítulo es vasto en destrezas para el diseño gráfico de funciones; por ello, he integrado análisis más específicos de cada una de las más conocidas. Por su amplitud, he ubicado en el *Apéndice* un diseño, serie de secuencias didácticas, para que los estudiantes *construyan* gráficamente las funciones trigonométricas elementales de seno, coseno, tangente, etc., en actividades prácticas del aula, en equipos que a lo más les llevará un par de clases.

Con el objeto de reforzar los aprendizajes del curso, he agregado un número suficiente de problemas y actividades y ejercicios, a cada sección de trabajo. Finalmente, he creído conveniente no hablar con la formalidad de la matemática de teoremas, conceptos y objetos, así como demostraciones rígidas, puesto que el texto por sí mismo está dirigido a estudiantes que cursan estos conocimientos en el nivel de ingeniería y para los cuales importa más entender éstos desde la perspectiva de su carrera y no desde el punto de vista de la matemática formal. No obstante, desarrollé demostraciones, opcionales, necesarias para dar continuidad al texto, a partir de las nociones épsilon-delta, intentándolo mediante apoyos gráficos y algebraicos en cada caso.

ALBERTO CAMACHO

INTRODUCCIÓN



ALBERTO BARAJAS

«Las matemáticas son mucho más que una acrobacia intelectual. Son la creación humana por antonomasia. La única prueba de que el hombre tiene cierto derecho a llamarse racional. En muchas actividades, lo vemos a diario, parece un ser loco, irracional, motivado por instintos crueles. Las matemáticas tienen un valor cultural, existencial, excepcional. Si este valor se pierde de vista y se les reduce sólo a una acrobacia intelectual, van a perder su magia».

Carta-entrevista de la Sociedad Matemática Mexicana, noviembre de 1996

ALBERTO BARAJAS: matemático mexicano, profesor de la UNAM que publicó sus primeros trabajos sobre gravitación, impulsado y asesorado por Birkhoff, en 1930.

Uno de los conceptos fundamentales en la enseñanza del cálculo es el de número. El concepto surgió en la antigüedad griega utilizándolo como magnitudes de segmentos de líneas; esta noción fue ampliándose y generalizándose con el tiempo. En la época de la invención del cálculo, el número no se colocaba en una estructura numérica como ahora lo conocemos. Ante ello, en las definiciones que surgieron de los primeros analistas o geómetras, así eran llamados matemáticos de los siglos XVII al XIX, podemos percibir las formas de inicio de la definición actual. Por ejemplo, Newton los concebía «como la relación de una cantidad cualquiera a otra de su misma especie que hayamos elegido por medida o unidad». Esta expresión es la que sustenta la definición rigurosa que a principios del siglo XX, en 1901, estableció Lebesgue para la *medida,* viéndola como *La medida* $m(p)$ *toma valores reales no negativos*. No obstante, la idea de Newton tuvo una amplia aceptación, de manera que para finales del siglo XVIII, se había posicionado, sobre todo, en la enseñanza de la matemática.

Así, en la Escuela Politécnica francesa se enseñaba una definición semejante a la de Newton que fue establecida por S. F. Lacroix en su libro de cálculo llamado *Calcul Différentiel et Integral*. La definición reza lo siguiente: «Por la voz cantidad entendemos todo aquello cuya magnitud por su naturaleza es comparable con otra de su

misma especie, de modo que con esta comparación se pueda determinar, y con el auxilio de algún ***número*** expresar la mutua relación de entre ambas». El número, así como lo expresaba Lacroix, es aquella magnitud que puede asemejarse a una cantidad; en tanto las cantidades son vistas como magnitudes físicas: rectas, áreas, volúmenes, etc., es decir, y usando palabras actuales, el número es la *medida* de la cantidad.

En México, las ideas newtonianas de número fueron conocidas en el Seminario de Minería, primera escuela de ingeniería del país, desde finales del siglo XVIII, gracias al uso que hacían los estudiantes del texto del autor español B. Bails, llamado *Principios Matemáticos*. Bails dejaba ver que la única manera de entender aquello que es número, es «saber primero que cosa es unidad». Luego, afirmaba: «unidad llamamos una cantidad que se toma o elige (las más veces a arbitrio) para que sirva de término de comparación respecto de todas las cantidades de su misma especie». La cantidad fue puesta en el mismo sentido físico de las magnitudes: o sea, en la manera de medir la magnitud de: pesos, áreas, longitudes, etc.

Las cantidades, en los autores mencionados, eran conocidas como *aquello que aumenta y disminuye*. Solamente aquello que aumenta y disminuye podía tomar la nominación de cantidad. Los números caen dentro de esa caracterización, también se colocan en ella las magnitudes físicas, como las líneas rectas, las áreas, etc. Esta idea surge de un contexto geométrico muy sencillo que tiene que ver con el potencial creativo de la imaginación: las cantidades que aumentan o disminuyen lo hacen solamente si se encuentran en movimiento. Un punto al desplazarse genera una recta, consecuentemente una recta genera un plano, y un plano en movimiento lleva a un sólido. En el sentido del movimiento, las cantidades fueron el núcleo de estudio de la matemática de los siglos XVIII, XIX y XX.

Por su característica de aumentar o disminuir, podemos suponer las cantidades como magnitudes variables, de hecho una cantidad es una variable. Esta idea asigna una categoría a las cantidades que solamente fue reconocida por Newton y Leibniz; idea que habremos de explorar con detalle más adelante.

No obstante, sería hasta 1887 que las ideas sobre las *cortaduras* de los números reales de R. Dedekind tendrían una profunda influencia sobre los fundamentos de la matemática a través del concepto de número. Dedekind dividió en *clases* los números racionales; cada clase es una cortadura, de manera que los pudo ordenar entre *elementos máximos, elementos mínimos*, el establecimiento de los racionales negativos, el cero, etc. En los casos en que las clases no contemplan elementos máximos o mínimos, la cortadura establece un número irracional. Por ejemplo, la raíz cuadrada de 2 es una cortadura entre todos los números negativos y entre aquellos que tengan un cuadrado inferior a 2 y entre los números que tengan un cuadrado superior a 2. Es esta actualmente una de las definiciones estándar de los números reales.

Un método más concreto lo daría G. Cantor; para éste, los números reales se debían considerar como decimales de infinitas cifras y, además, los decimales infinitos fueron vistos como límites de fracciones decimales finitas. Por ejemplo la sucesión de números decimales tiene por límite al número racional.

Las ideas de Dedekind y Cantor serían puestas en la escena de la enseñanza desde principios del siglo XX en la Escuela Politécnica, manuales para la enseñanza del cálculo como el de M. Duhamel, *Cours d´Analyse de l´École Polytechnique* de principios del siglo XX, así como el texto de Reygnaud-Hadamard llamado *Problémes et dèveloppmens sur diverses parties des mathématiques* (de la versión de 1823), así lo

evidencian. Por ejemplo, en el texto de Reygnaud-Hadamard se habla de una «teoría de los inconmensurables», como: «toda relación que se de entre dos números de cualquier valor conmensurable, se dará luego que devengan inconmensurables, porque ellos pueden ser considerados como límites de números conmensurables».

En México estas ideas se llegaron a enseñar en la Escuela Nacional Preparatoria desde 1905; el profesor de esta escuela, A. Lamadrid, escribió un *Curso abreviado de análisis* en el que desplegó un amplio conocimiento y manipulación algorítmica de los números racionales, conversión de decimales inconmensurables a fracciones, haciendo uso del concepto de límite; de ello, Lamadrid afirmaba: «el límite de una fracción decimal periódica simple, es un quebrado cuyo numerador es el periodo, y cuyo denominador es un número formado por tantos nueves, como cifras tiene el periodo».

La propuesta de números como límites de sucesiones y cortaduras, de Cantor y Dedekind, son complementarias y prevalecen actualmente en la enseñanza matemática. En nuestro caso, esas dos ideas darán orientación al curso de cálculo diferencial que enseguida planteamos, toda vez que las retomamos en el contexto que el propio curso debe colocarse. Tomaremos también, como agregado fundamental del curso, la noción de cantidad, parte intrínseca del estudio de los fenómenos de variación del cálculo. El *número* será visto como la medida absoluta de las cantidades y, estas últimas, como aquello que tiende a aumentar o disminuir en tanto su posibilidad aritmética y física.

Parte I
Números reales, funciones y límites

Números reales 1



FRANCISCO DÍAZ COVARRUBIAS
(1833-1889)

«El conjunto del álgebra presenta otro ejemplo del artificio de que tratamos, pues nacida esta ciencia con posterioridad a la aritmética, quiere decir a la ciencia que se ocupa de del cálculo de los *valores*, prescinde completamente de toda idea concreta de *número* para no especular mas que sobre ideas abstractas de *relación*; y entonces el carácter eminentemente generalizador de esta concepción, le permite servirse de signos o símbolos auxiliares, que si bien no representan por sí mismos valor alguno, pueden representar cualquiera valor imaginable».

FRANCISCO DÍAZ COVARRUBIAS

Ingeniero mexicano, autor del primer libro de *Cálculo Infinitesimal*, escrito para la enseñanza preparatoria en 1873.

1.1. CLASIFICACIÓN DE LOS NÚMEROS REALES. ENTRE CONTAR Y MEDIR

El *sistema de los reales* consiste de un conjunto de elementos denominados números que dan sentido a las operaciones fundamentales conocidas como suma, resta, multiplicación, división, resolución de ecuaciones y procesos algebraicos, entre otras que utilizarás en este y otros cursos. Generalmente, la mayoría de los textos de matemáticas representan los números reales con el símbolo $\mathbb{R}$. De aquí la siguiente proposición:

> *Los números, tal y como los concebimos en la actualidad, son símbolos despojados de cualquier referencia a objetos concretos.*

[1-1]

1.1.1. PROPIEDADES DE LOS NÚMEROS REALES

Estos pueden ser cantidades de libros, personas, edades, etc. Los números en general sirven para *contar* elementos de conjuntos de ese tipo de objetos. Sin embargo,

los números tienen una cualidad aún más importante, que es aquella de *medir* cantidades físicas, longitudes, áreas, volúmenes, etc.

Las operaciones del cálculo se sustentan en el sistema de los números reales y en sus propiedades, por lo tanto empezaremos por clasificarlos y conocerlos. En este sentido será necesario que te familiarices con las operaciones que en el curso realizarás con ellos.

Antes, recordemos algunas de las propiedades elementales de los números reales, que has utilizado desde tus cursos en la preparatoria. La importancia de estas propiedades radica en que mediante ellas puedas hacer combinaciones que te lleven a la obtención de otros números de igual naturaleza que los reales. Como se verá más adelante, estas propiedades se adecuan bien a determinadas clases de números y no a otros.

Propiedad transitiva de la igualdad. Si $a = b$ y $b = c$ entonces $a = c$. Por ejemplo: Sí $3 = 3$ y $3 = 3 \rightarrow 3 = 3$. Propiedad conmutativa de la suma y de la multiplicación: $a + b = b + a$ y $a \cdot b = b \cdot a$. Ejemplos: $\frac{2}{5} + 7 = 7 + \frac{2}{5}$, $4(5) = 5(4)$. Propiedad asociativa de la suma y multiplicación: $a + (b + c) = (a + b) + c$ y $a(b \cdot c) = (a \cdot b)c$. Por ejemplo: $4 + (3 + 2) = (4 + 3) + 2$, $5 \cdot (8 \cdot 7) = (5 \cdot 8) \cdot 7$. Propiedad del inverso: para cada número real a, existe un único número real denotado por $-a$, tal que: $a + (-a) = 0$, el número $-a$ es llamado inverso aditivo de a. Para cada número real a, excepto el cero, existe un único número real denotado por a^{-1}, tal que: $a \times a^{-1} = 1$ o $a \times \frac{1}{a} = 1$, el número a^{-1} es llamado el inverso multiplicativo de a. Propiedad distributiva: $a(b + c) = ab + ac$.

Un número real puede ser positivo, negativo o cero e identificarse por *clases* de números. Los hay de dos clases: racionales e irracionales. Un número racional es cualquier número que se puede expresar como la razón de dos enteros como 1, 2, $\frac{1}{2}$, -5, 0,25, 4,222…, etc.; es decir, en la forma $\frac{p}{q}$, donde las literales p y q representan números enteros, de modo que q sea distinta de cero. De está división se obtienen resultados enteros, fracciones o decimales. Por su lado, la clase de los números irracionales son aquellos que no se pueden expresar como la razón de dos enteros, de ahí su denominación.

1.1.2. OPERACIONES CON LOS RACIONALES E IRRACIONALES

En este momento lo más importante es conocer ambas clases de números; más adelante, en la sección 1.3.1, te sugerimos ideas para definirlos y, además, hacer una construcción de ellos.

De acuerdo a lo anterior, un número racional es considerado como la división de dos enteros. Por ejemplo, $\frac{11}{3}$ es un número racional y se puede expresar también en forma decimal como su división: 3,666666666666…

¿Qué observas en sus decimales?

A manera de ejercicio, cambia los siguientes números racionales a decimales mediante una división (realízala manualmente):

a) $\frac{1}{4}$

b) $\frac{2}{11}$

c) $\frac{5}{37}$

d) $\frac{11}{13}$

e) $\frac{269}{990}$

¿Qué observas en sus decimales?

Analicemos los resultados de los casos anteriores:

a) 0,25
b) 0,181818181818…
c) 0,135135135135…
d) 0,846153846153…
e) 0,2717171717171…

Se aprecia que en el inciso a) 0,25, sus decimales son finitos y en los incisos restantes son infinitos. ¿Qué entiendes por finito e infinito?, he ahí la diferencia: entre los decimales conmensurables (decimales que tienen un número determinado de cifras) y los decimales inconmensurables (decimales infinitos), que además se les llama periódicos, porque las cifras de sus decimales se repiten, por ejemplo en el inciso b) sus decimales se repiten cada 2 periodos; en el c) cada 3; en el d) cada 6 y en el e) cada 2, a partir del segundo decimal.

Los números decimales que no guardan un periodo en sus cifras, o bien no resultan de la división de dos enteros, se les llama números irracionales, por ejemplo el número: $1{,}41421356237\ldots = \sqrt{2}$.

EJEMPLO 1

De acuerdo a lo anterior, intenta clasificar el siguiente número real: 0,333333… ¿Es un número racional? ¿Por qué? Observa que después del punto decimal se repite la cifra 3 cada un periodo.

Luego ¿cuál es la razón de dos enteros $\frac{p}{q}$ que equivale a 0,333333…?

SOLUCIÓN:

Para resolver esto último, consideremos que x simboliza la razón de los dos enteros $\frac{p}{q}$; por lo tanto partimos de:

$$x = 0{,}333333\ldots \quad (1)$$

Como el 3 se repite cada un periodo, entonces multiplicamos por 10 ambos lados de la expresión, quedándonos:

$$10x = 3{,}33333\ldots \quad (2)$$

Restamos las ecuaciones (2) de (1), obtenemos:

$$\begin{array}{r} 10x = 3{,}33333\ldots \\ x = 0{,}3333\ldots \\ \hline 9x = 3 \end{array}$$

Despejando x, nos queda que:

$$x = \frac{3}{9}, \text{ o bien: } x = \frac{1}{3}$$

Lo cual muestra que 0,333333…, es un número racional de la forma $\frac{p}{q} = \frac{1}{3}$. Donde $p = 1$ y $q = 3$.

EJEMPLO 2

De manera similar podemos probar que el número 2,34525252…, representa un número racional en la forma $\frac{p}{q}$.

SOLUCIÓN:

Digamos que x simboliza la razón de dos enteros, por lo tanto partimos de $x = 2{,}3452525252\ldots$ Para llegar al resultado que se busca, debemos dejar del lado izquierdo del punto decimal la parte ,34 que se encuentra fuera del periodo. Para ello es necesario que multipliquemos por 100, quedándonos:

$$100x = 234{,}525252\ldots \quad (1)$$

Como esta última se repite cada dos periodos, o cifras, multiplicamos de nuevo por 100, de modo que nos quede:

$$10.000x = 23.452{,}525252\ldots \quad (2)$$

¿Se ha comprendido el truco?

Restamos la segunda ecuación (2) de la primera (1), y obtenemos:

$$\begin{array}{r} 100x = 234{,}525252\ldots \\ 10.000x = 23.452{,}525252\ldots \\ \hline 9.900x = 23.218\ldots \quad (3) \end{array}$$

Despejando x de 3, nos queda que:

$$x = \frac{23.218}{9.900}$$

De esta manera probamos que 2,3452525252…… $= \dfrac{23.218}{9.900}$ es un número racional, puesto que resulta de la división de dos enteros $p = 23.218$ y $q = 9.900$. Podemos concluir que, como se menciona en la tabla anterior:

Los decimales periódicos son números racionales.

[1-2]

En el caso de las representaciones decimales de números irracionales, estas no se repiten en periodos iguales. Por ejemplo, el número irracional (construido a propósito):

0,101001000100001000000…

O bien el conocido número irracional π (pi), que es equivalente a 3,141592653589793238462643…, con 16 cifras decimales que da la calculadora.

Por lo general los números irracionales de más utilidad se simbolizan con expresiones que pueden ser: literales, radicales, logarítmicas y trigonométricas. Los siguientes son solamente algunos ejemplos:

a) $\sqrt{2} = 1{,}4142135623730950488\ldots$
b) $\sqrt{3} = 1{,}732050807568877293527\ldots$
c) $\cos 23^0 = 0{,}920504853\ldots$
d) $e = 2{,}718\ldots$
e) $\ln 2 = 0{,}69314718\ldots$

Casos inmediatos de números irracionales son todas las raíces de los números primos, por ejemplo las raíces: $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{11}$, etc. Por lo general, al hacer uso de irracionales en los problemas de ingeniería, estos se *redondean* a conveniencia a solamente un determinado número de cifras, lo cual los convierte en números racionales comunes. Por ejemplo 3,1416 es el número π, 3,141592653589793238462643…, redondeado a cuatro cifras decimales. Los casos de raíces de potencias, no primos, como: $\sqrt{4}$, $\sqrt{16}$, etc., no caen en esta clasificación. ¿Por qué?

1.1.3. LA DIVISIÓN POR CERO EN LOS RACIONALES

¿Por qué en la expresión racional $\dfrac{p}{q}$, q debe ser distinta de cero?

¿Qué puedes comentar del número $0 = \dfrac{0}{2}$? Como puedes ver en este caso, el numerador es cero y el denominador cualquier entero diferente de cero, es decir, es un

número racional. En expresiones de este tipo resulta fácil caer en el error de construirlos con el denominador igual a cero. Es común escribir equivocadamente $\frac{5}{0} = 0$. También es cotidiano decir que $\frac{0}{0} = 1$. O bien establecer que la operación entre cero es infinito, por ejemplo $\frac{3}{0} = \infty$. Los primeros dos casos son completamente falsos. En principio hay que tomar en cuenta que:

La operación de dividir por cero no es una operación valida dentro de las propiedades de los números reales.

[1-3]

Puedes verificar que esta proposición no se encuentra en las propiedades antes vistas. También es congruente aclarar que la operación es indeterminada, es decir, no existe un número real que sea solución de esa operación.

En el tercer caso $\frac{3}{0} = \infty$, se hace uso de una *convención*, es decir, algo que conviene sin de pronto ponerlo ha discusión, debido a que ofrece resultados ciertos y congruentes. Granville, en su texto de Cálculo, convino a principios del siglo pasado (1902) los siguientes casos particulares más frecuentes. Propuso estos:

$$\frac{c}{0} = \infty,\ c \cdot \infty = \infty,\ \frac{\infty}{c} = 00 \ \text{y}\ \frac{c}{\infty} = 0$$

[1-4]

Aunque de momento las aceptemos, estas expresiones obedecen a resultados de procesos que tienen que ver con el concepto de límite que se estudiará más adelante.

1.1.4. LOS NÚMEROS REALES COMO SUCESIONES

1.1.4.1. Racionales que atraen racionales

Consideremos el segmento de recta entre los números 0 y 1, y hagamos una partición o bisección a la mitad, quedándonos $\frac{1}{2}$; ahora hagamos la misma operación al segmento 0 y $\frac{1}{2}$, del cual nos queda $\frac{1}{4}$; prosiguiendo el proceso de bisección obtendremos sucesivamente los números $\frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \ldots$, etc. De esta manera hemos generado la sucesión de números racionales, en el segmento 0 y 1, siguiente [1]:

[1] Las sucesiones de números reales serán vistas con más detalle en el Capítulo 6, de momento intentamos convenir en su utilidad, sin menoscabo de las definiciones que de estas se darán en esa unidad.

$$\mathbf{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}, \frac{1}{128}, \ldots, \mathbf{0}$$

Como se aprecia en esta sucesión, sus últimos términos: $\ldots, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}, \frac{1}{128}, \ldots,$ son atraídos hacia el cero **0** y se encuentran bastante cerca de éste.

¿Qué significa el cero para esta sucesión?

No obstante, nos podemos acercar aún más al cero, valores más próximos de este son las siguientes particiones: $\frac{1}{256}, \frac{1}{512}, \frac{1}{1.024}$ y $\frac{1}{2.048}$.

¿Pero hasta dónde nos podemos acercar con este procedimiento al cero como valor extremo? Si hacemos las diferencias entre el cero y cada una de las cuatro últimas aproximaciones obtendremos los siguientes valores: 0,003, 0,001, 0,0009, 0,00048. Estos muestran qué tanto nos hemos acercado al cero. Lo que resulta interesante de la experiencia es que *nos hemos acercado a ese valor tanto como lo deseamos*, teniendo por último valor de referencia al extremo elegido, en este caso el cero. De aquí podemos afirmar la proposición siguiente:

En la construcción de una sucesión de valores numéricos, a partir de dos valores asignados, nos podemos acercar tanto como deseemos a cualquiera de estos.

[1-5]

Utilizando esta idea genera enseguida una sucesión de números racionales en el mismo segmento 0 y 1, cuyos últimos términos sean atraídos por el 1. Es claro que hay que biseccionar entre 1 y $\frac{1}{2}$. Intenta acercarte lo suficiente de manera que la distancia entre el extremo y el último valor numérico que tomes sea del orden de $\frac{1}{100.000}$.

1.1.4.2. Sumas geométricas

Como en el caso anterior: ¿Qué significa el uno para esta última sucesión?

Otra manera para determinar el cociente $\frac{p}{q}$ que le corresponde a un número decimal periódico es la de representar el número como la suma de una *serie geométrica* de racionales. Por ejemplo, representemos el número racional 2,75111111111…, como una suma geométrica de números racionales. Tomando el periodo como 11, es posible escribir el número de acuerdo a su posición decimal como la suma inconmensurable:

$$2 + \frac{75}{100} + \frac{11}{10.000} + \frac{11}{1.000.000} + \frac{11}{100.000.000} + \frac{11}{1.000.000.000} + \ldots$$

Además, los valores en el denominador los podemos reescribir en potencias de 10, como:

$$2 + \frac{75}{10^2} + \frac{11}{10^4} + \frac{11}{10^6} + \frac{11}{10^8} + \frac{11}{10^{10}} + \ldots \quad (1)$$

Expresión en la que se puede apreciar la *suma geométrica* infinita de términos:

$$\frac{11}{10^4} + \frac{11}{10^6} + \frac{11}{10^8} + \frac{11}{10^{10}} + \ldots \quad (2)$$

Cuya razón de crecimiento es $\frac{1}{10^2}$. Si hacemos uso de la proposición para determinar la suma de una serie geométrica infinita, vista en tus cursos de preparatoria, la cual se expresa con la fórmula [1-6] que aparece enseguida:

Fórmula para determinar la suma infinita de términos de una sucesión numérica:

$$S = \frac{a_1}{1 - r}$$

[1-6]

Donde a_1 es el primer término de la serie y r su razón de crecimiento. Tendremos que la suma S es:

$S = \dfrac{\frac{11}{10^4}}{1 - \frac{1}{10^2}}$, o bien: $S = \dfrac{\frac{11}{10^4}}{\frac{10^2 - 1}{10^2}}$. Simplificando: $S = \dfrac{\frac{11}{10^2}}{100 - 1}$, queda:

$S = \dfrac{11}{99 \times 10^2}$. Sustituyendo S en lugar de la serie geométrica en (1):

Tenemos:

$$2 + \frac{75}{100} + \frac{11}{9.900}$$

Sumando estos tres términos y reduciendo la expresión, nos queda: $\frac{619}{225}$.

Que resulta ser la expresión racional del número: 2,7511111111…

Esto último nos permite plantear la siguiente proposición:

Todo número decimal periódico puede ser escrito en forma de suma geométrica, de manera que ello permita determinar la forma racional del número.

[1-7]

Sin embargo, puedes hacer uso de la regla ya vista, anterior a esta, para llegar al mismo resultado.

1.1.4.3. Irracionales que atraen racionales

Finalmente, si usamos la idea anterior del número que atrae a los términos de una sucesión, pero considerando que dicho número sea un irracional, pudiéramos generar sucesiones de números racionales que son atraídos por un irracional. Véase el siguiente ejemplo:

La sucesión de racionales: 1, 1,4, 1,41, 1,414, 1,4142, 1,41421, 1,414213, 1,4142135, …, es *atraída* por el número irracional $\sqrt{2}$. Sucesión que, como puedes ver, es inconmensurable. De esta forma, es válido escribir la sucesión colocando al final $\sqrt{2}$, como:

$$1,\ 1{,}4,\ 1{,}41,\ 1{,}414,\ 1{,}4142,\ 1{,}41421,\ 1{,}414213,\ 1{,}4142135,\ \ldots,\ \sqrt{2}$$

El valor que *atrae* a los demás términos de una sucesión, y al cual nos podamos acercar tanto como queramos, se llama *límite* de la sucesión, concepto que estudiaras en el tercer capítulo y que es central en la solución de problemas del cálculo e ingeniería. Otra idea que explotaremos, y surge del problema, es la de *acercarnos tanto como queramos* al último término de la sucesión. En este caso la diferencia entre $\sqrt{2}$ = **1,4142135623731**… (valor estimado por la calculadora) y 1,4142135, último valor tomado, es del orden de 0,000000062.

De lo anterior surge la siguiente proposición:

> *Todo número irracional puede ser escrito en forma de una sucesión de números racionales, cuyo último valor sea el propio número irracional.*

[1-8]

ACTIVIDADES Y EJERCICIOS DE LA SECCIÓN 1.1

I. Revisión de conceptos

1. Es falso que $\frac{4}{0} = 0$, puesto que la división por cero ____________________ de las propiedades de los números reales.

2. Es cierto que $\frac{0}{3} = 0$, puesto que ____________________ de los números reales.

3. Es falso que $\frac{0}{0} = \infty$, puesto que ____________________ de las propiedades de los números reales.

4. Los siguientes valores numéricos corresponden a números reales. Sin embargo, no todos los planteamientos que se hacen son verdaderos. Clasifica entre verdadero (V) o falso (F) cada uno de estos:

a) $1 = 0{,}999\ldots$
b) $\frac{1}{3} = 0{,}333\ldots$
c) $2{,}010010001\ldots$, es irracional.
d) $\sqrt{11}$ es un racional
e) $\sqrt{9}$ es racional
f) $0{,}999\ldots$ y $\frac{1}{3}$ son racionales

5. Clasifica el resultado numérico de las siguientes operaciones entre racional $\mathbb{Q}$ o irracional $\mathbb{I}$ (donde sea necesario, has uso de tu calculadora):

a) La suma de $\frac{1}{4} + 3$ ___
b) $\frac{\pi^2 - \sqrt{2}}{\sqrt{7} - \sqrt{6}}$ ___
c) La operación de $\ln 2 - \sqrt{5}$ ___
d) El resultado de la multiplicación $5 \text{ sen } 38°$ ___
e) La operación $\frac{3 - \sqrt{5}}{2}$ ___

II. Actividades y operaciones con números reales

1. Clasifica cada uno de los siguientes valores numéricos entre: racional conmensurable, racional inconmensurable periódico e irracional:

a) $0{,}125$
b) $-14{,}656565\ldots$
c) $3{,}14159$
d) $2{,}2526272829\ldots$
e) $6{,}456789456789456789\ldots$
f) 25
g) $-17.897{,}63$

2. Dados los números decimales inconmensurables periódicos

a) $3{,}65478787878\ldots$
b) $0{,}9999999\ldots$,
c) $326{,}32456745674567\ldots$
d) $-25{,}143143143143\ldots$

Determina los enteros p y q que corresponden a la fracción. Utiliza en cada caso los dos métodos vistos en esta parte.

3. Coloca los valores numéricos de los rubros 1) y 2) en la recta numérica.

4. Verifica en tu calculadora el valor numérico correspondiente a sen 39° 46′ 27″. Como puedes ver, esta expresión simboliza al número 0,6397632332750… ¿El número es racional o irracional? ¿Se puede expresar como el cociente de dos enteros en la forma: $\frac{p}{q} = 0{,}6397632332750\ldots$?

Habrás concluido que el número es irracional (decimal inconmensurable no periódico) lo cual deja ver la imposibilidad de encontrar los enteros p y q.

El ejemplo anterior servirá para darte una idea de la existencia de una gran cantidad de números irracionales. Observa que a partir de sen 39° 46′ 27″ puedes generar e inventar los números irracionales que desees, sin límite alguno. No obstante, puedes elegir cualquier valor numérico en grados, así como cualquier función trigonométrica (a excepción de algunos casos particulares) para hacerlo. Utiliza tu calculadora para verificar cómo cada uno de los siguientes valores de la sucesión que se genera a partir de sen 39° 46′ 27″ corresponde a números irracionales:

sen 39° 46′ 27,1″ =
sen 39° 46′ 27,11″ =
sen 39° 46′ 27,111″ =
sen 39° 46′ 27,1111″ =
sen 39° 46′ 27,11111″ =

5. En este ejercicio se pretende que construyas números irracionales a través de una cierta regla conocida. Un caso no muy típico fue el ejemplo de ln 2, que se planteó anteriormente. En éste, la regla consistió en hacer uso de la calculadora y determinar el valor correspondiente de 0,69314718…, el cual representa a ln 2. ¿Qué te parece si pruebas con los valores que resultan de ln x, dando en la calculadora valores positivos a x mayores que uno, por ejemplo: ln 3, ln 4, ln 5, etc., y determinas que efectivamente estos valores numéricos corresponden a números irracionales? Prueba con por lo menos cinco valores. ¿Habrá casos en el que ln x determine números racionales? ¿En cuáles?

6. Exhibe por lo menos cinco valores resultados de operaciones trigonométricas, que correspondan a números racionales. Por ejemplo, en tg 45° el resultado es un número racional.

7. Con una diferencia entre el último valor de la sucesión con respecto al último extremo irracional de $\frac{1}{1.000.000}$, escribe sucesiones cuyos últimos valores extremos sean (tomar todos las cifras que de la calculadora):

a) e
b) ln 3
c) sen 43° 12′

d) $\sqrt{11}$
e) $\sqrt{3}$
f) π

8. Dada la siguiente fracción continua, se pide formar una suma de términos que inicia con el 1, continúa con el $1 + 1 = 2$, el $1 + \frac{1}{1+1} = \frac{3}{2}$, etc.

$$r = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ldots}}}}$$

Cuando ya tengas la suma de términos, forma la suma recíproca con por lo menos diez términos y prueba que el último de los términos da por resultado aproximado la llamada *razón de oro* de Fibonacci, es decir:

$$\frac{1}{r} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$$

III. Problemas para examen

1. Un número irracional contenido entre los números racionales $-\frac{208}{100}$ y $-\frac{209}{100}$ es:

a) –2,086
b) –2,0866666…
c) –2,0865151…
d) –2,086123456…
e) Ninguno de las anteriores.

2. Encuentre la fracción $\frac{p}{q}$ que corresponde al número 5,43823232323… Hay que hacer uso de los métodos vistos anteriormente.

3. Escribe el número 23,865555…, como una suma geométrica de números racionales.

4. Siendo el número irracional 1,732050808…, es claro que lo podemos enunciar de modo que nos queden potencias de 10 en el denominador, como: $1 + \frac{7}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{2}{10^3} + \frac{0}{10^4} + \frac{5}{10^5} + \ldots$ Prueba por el método de sumar la serie geométrica que

no es posible realizar dicha operación y llegar al número inicial 1,732050808… ¿Cuál es la razón de esto último?

5. Haciendo uso del método de bisección, escribe sucesiones de por lo menos seis valores de números racionales contenidos entre los segmentos:

a) $\left(\frac{1}{16}, \frac{1}{32}\right)$

b) $\left(0, \frac{1}{5}\right)$

c) (0, 0,0000125)

d) $\left(0, \frac{1}{1.000.000}\right)$

En las que, en cada caso, los valores extremos atraigan las sucesiones correspondientes. Considera la diferencia entre el termino más cercano al próximo extremo del orden de $\frac{1}{100.000}$.

6. Dados los siguientes números irracionales 0,746673012… y 0,746675915…, construye entre ambos, primero, tres números racionales y, segundo, tres irracionales.

7. Dada la siguiente relación $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, sustituye en esta los valores de $n = 1$, 100, 1.000, 10.000 y 1.000.000.

a) Escribe una sucesión con los resultados colocando al final la relación anterior.
b) ¿Cuál es la diferencia entre los dos últimos valores obtenidos para $n = 10.000$ y $n = 100.000$?
c) ¿Reconoces el último número al que se acerca la sucesión?, ¿es racional o irracional? ¿cuál es éste?

1.2. INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE LOS NÚMEROS REALES

1.2.1. RECTA NUMÉRICA

Los números reales pueden ser vistos como inscripciones de puntos que están a lo largo de una recta horizontal *infinita,* es decir, su dibujo no tiene límite o es inconmensurable, lo cual se indica con puntas de flecha en sus extremos (véase gráfica en la Figura 1.1). La recta numérica representa una escala que permite medir la distancia dirigida desde un punto fijo llamado origen, elegido arbitrariamente, donde se coloca el cero 0. En el caso de los valores numéricos, éstos se consideran negativos la izquierda y positivos a la derecha.

A cada punto en la recta real le corresponde un número real, aunque no existe la posibilidad de mostrarlos a todos. Los números reales, racionales e irracionales, se

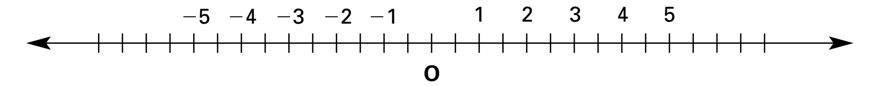


FIGURA 1.1. Recta real.

pueden colocar en la recta real por medio de puntos o pequeños segmentos de recta de menor a mayor.

Para construir una recta que contenga algunos números reales podemos seguir los siguientes pasos, para casos numéricos particulares. En cada paso haremos comentarios importantes relacionados con los conjuntos de números:

$\mathbb{N}$: naturales

1. Observa que el conteo *natural* y trivial de las cosas cotidianas permiten construir el sistema de los *números naturales*. Usa esta idea para construir la serie de los números naturales en la forma: 1, 2, 3, … Escribe en tu cuaderno el conjunto de los naturales y denótalo con el símbolo $\mathbb{N}$, como $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$, coloca algunos de ellos sobre la recta real, dibuja la recta haciendo uso de una regla graduada, de manera que los valores 1, 2, 3, … se encuentren a la misma distancia uno del otro. De modo que la escala que uses sea la distancia entre el origen 0 y el 1. Esta escala también es llamada *unidad de medida.*

La unidad de medida permite medir haciendo uso de números naturales, no obstante la medición se restringe a solamente cantidades exactas en términos de los naturales.

$\mathbb{Z}$: enteros

2. Continúa con la construcción de los *enteros positivos* y negativos, incluyendo en este conjunto al cero, en la forma: … $-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots$ Expresa a este último conjunto con el símbolo $\mathbb{Z}$, escribiéndolo en tu cuaderno como $\mathbb{Z} = \{\dots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ e incorpora algunos de ellos sobre la recta real.

$\mathbb{Q}$: racionales

3. Construye un conjunto de números racionales $\mathbb{Q}$ mediante razones de números enteros, en la forma ya vista $\dfrac{p}{q}$, donde p y q son números enteros y q no puede ser cero, tu escritura se puede ver como la siguiente:

$$\mathbb{Q} = \left\{\dots, -5, -4, -3, -2, \frac{-3}{2}, -1, 0, \frac{1}{2}, 2, 3, \frac{10}{3}, 4, 5, \dots\right\}$$

Recuerda que los conjuntos de números naturales $\mathbb{N}$ y enteros $\mathbb{Z}$ están contenidos en estos últimos.

Al construir los números racionales la unidad de medida trasciende para ser usada al medir cantidades que pueden no ser exactamente del tamaño de los números naturales o enteros, lo cual nos lleva necesariamente a subdividir la unidad de medida en fracciones de la forma $\frac{p}{q}$. Esta definición lleva a establecer nuevas propiedades para los números racionales que se heredan de las que ya vimos, estas son:

Operaciones con los racionales

Siendo *a, b, c* y *d* números enteros: $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$; $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$, $\frac{a}{a}=1$, $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ si $ad=bc$.

[1-8]

$\mathbb{I}$: irracionales

4. Construye un conjunto de números irracionales $\mathbb{I}$. Es fácil, recuerda que, a diferencia del conjunto de los números racionales, estos no presentan periodicidad en su expansión decimal, toda vez que son inconmensurables. Podemos colocar algunos de los vistos anteriormente, como por ejemplo:

$$\mathbb{I}=\{\ldots,-\sqrt{5},-\sqrt{3},-\sqrt{2},\pi,e,\ln 2,\sqrt{2},\sqrt{3},\ldots\}$$

$\mathbb{R}$: reales: los reales $\mathbb{R}$ son la suma de los racionales $\mathbb{Q}$ con los irracionales $\mathbb{I}$

5. El conjunto de los números reales $\mathbb{R}$, deseado, es la suma de los racionales $\mathbb{Q}$ con los irracionales $\mathbb{I}$, puede verse enseguida con algunos casos, como:

$$\mathbb{R}=\mathbb{Q}+\mathbb{I}=\left\{\ldots,-5,-4,-3,-\ln 10,-2,-\sqrt{3},\frac{-3}{2},-1,0,\frac{1}{2},\ln 2,1,\sqrt{2},2,\sqrt{5},e,3,\pi,\frac{10}{3},4,5,\ldots\right\}$$

6. La representación de los reales en la recta real nos quedaría de la siguiente manera:

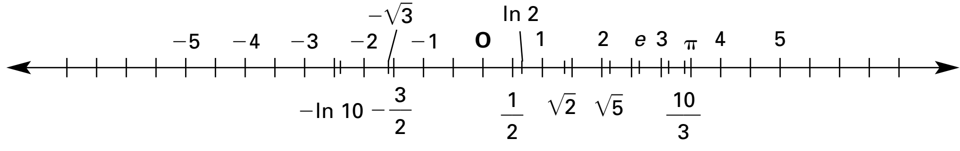


FIGURA 1.2. Recta real.

Observa que por la escala empleada en la graficación, los números se ven muy *apretados*, lo cual deja ver la necesidad, en algunos casos, de hacer uso de escalas más amplias. No obstante, y aún con otras escalas, el apretujamiento va a seguir ocurriendo debido a la amplitud de la densidad en que están colocados los números en la recta real. Esto último hace necesario extender el concepto de número por otro que los matemáticos de diferentes épocas, percibieron y utilizaron sin meterse en las complicaciones de averiguar su naturaleza, este es el del *continuo de los números reales.* Dicha noción indica que cualquier número en la recta tiene a su lado inmediato otro número real de la misma naturaleza que este, lo cual significa que la recta real es *densa* en números reales, y se ha demostrado que no contiene *huecos*, es decir, está cubierta totalmente por números.

Finalmente, a cada punto que se localiza en la recta real se le llama *coordenada* del punto.

1.2.2. CONCEPTO DE INTERVALO

Intervalo cerrado

Partamos de la siguiente proposición:

> *Un intervalo es un segmento de la recta real en la vecindad de dos valores numéricos* a *y* b *en los que, generalmente,* a < b *(léase «a menor que b»)*

[1-9]

Todo intervalo contiene una cantidad inconmensurable de números comprendidos entre los valores extremos a y b.

Cada intervalo es un conjunto *cerrado* de números si incluye los valores de a y b, ello se escribe como: $a \leq x \leq b$ (véase Figura 1.3), léase «x mayor o igual que a y x menor o igual que b».



FIGURA 1.3. Intervalo cerrado mostrando los extremos a y b en corchetes.

La característica principal de un intervalo cerrado, es que en el segmento existe un número mayor a y un número menor b. Generalmente se admite hacer uso de corchetes para dar significado a los intervalos cerrados, como en el siguiente caso $[a, b]$. Por ejemplo, $[3, 8]$ denota que $3 \leq x \leq 8$.

En el caso en que los valores extremos del intervalo no sean incluidos en este, la manera de escribirlos es a través de $a < x < b$, o bien haciendo uso de paréntesis como (a, b), lo cual se denomina intervalo *abierto* (véase Figura 1.4).



FIGURA 1.4. Intervalo abierto mostrando los extremos a y b en paréntesis.

Intervalo abierto

Por ejemplo (2, 6) denota el intervalo $2 < x < 6$.

Cuando $a \leq x < b$, se dice que x pertenece al *semi-intervalo* $[a, b)$; o bien si $a < x \leq b$, se dice que x pertenece al semi-intervalo $(a, b]$ (véase la Figura 1.5).



FIGURA 1.5. Semi-intervalo, abierto por la izquierda y cerrado por la derecha.

En las ocasiones en que los valores que toma x en el intervalo son inconmensurables sin límite a partir de algún valor, incluido o no en el propio intervalo, se hace uso del símbolo de infinito (∞) para mostrar el aspecto inconmensurable del intervalo. Son los casos $a > 0$, $a \geq 0$, $a < 0$ y $a \leq 0$. Respectivamente se expresan como (a, ∞), $[a, \infty)$, $(-\infty, a)$ y $(-\infty, a]$, tal como se aprecia en las Figuras 1.6 y 1.7.



FIGURA 1.6. Intervalo inconmensurable sin límite en un extremo abierto en a.

FIGURA 1.7. Intervalo inconmensurable sin límite en un extremo cerrado en a.

En todos estos casos los intervalos son abiertos en el infinito debido a que hacemos uso de ese símbolo a partir de que así nos *conviene* y puesto que de esa manera podemos mostrar la inconmensurabilidad del intervalo. El infinito NO es un número real, esa es otra razón por la cual dejamos abierto el intervalo donde este se coloca.

1.3. DESIGUALDADES LINEALES Y CUADRÁTICAS. PROPIEDADES

1.3.1. NOCIÓN DE ORDEN

Como ya mencionamos, los números reales distintos de cero se separan en forma adecuada en dos conjuntos, los números reales positivos y los números reales negativos.

Los números x que son mayores que cero se llaman positivos, mientras los números x que son menores que cero se llaman negativos. A esta posibilidad de colocarles en la recta numérica, entre positivos y negativos, se le conoce como *orden de los números reales.*

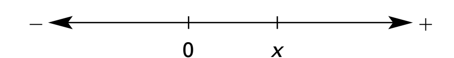


FIGURA 1.8. *Orden* en la recta real.

La relación de orden hace necesario introducir los símbolos $<$ y $>$ (que se leen: *menor que* y *mayor que*). Por ejemplo, si consideramos que x e y son números en la recta real, de manera que x esté a la izquierda de y, diremos que $x < y$ o bien $x - y < 0$. De modo que la diferencia $x - y < 0$ representa una *distancia o magnitud* entre los valores de x e y.

Si los valores x e y fueran, por ejemplo, los números $x = 3$ e $y = 8$, la distancia entre ambos estaría representada por la cantidad $3 - 8 < 0$. Expresión válida puesto que $-5 < 0$.

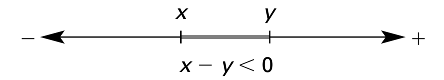


FIGURA 1.9. La diferencia $x - y < 0$ representa una magnitud entre x e y.

Aun cuando el *orden* de la operación puede ser como $8 - 3 < 0$, ¿qué propiedad de los números reales permite esa última operación?

No obstante, $x - y < 0$ representa en este caso una distancia, magnitud que en los problemas de ingeniería se concibe positiva. Ello nos hará introducir, más adelante, la noción de *valor absoluto* como: $|x - y| < 0$, símbolo que dejará entrever que toda cantidad es, por su propia naturaleza, positiva.

1.3.2. NOCIÓN DE DESIGUALDAD

Partamos de la siguiente proposición:

Dos expresiones relacionadas mediante los signos $<$, $\leq$ (menor igual), $>$, $\geq$ (mayor igual), o bien el signo $\neq$ (diferente de) forman una desigualdad o inecuación (puesto que en las ecuaciones solamente se hace uso del símbolo de igualdad $=$).

[1-10]

Ejemplos como el ya visto dan idea de esto último:

a) $-5 < 0$, o bien: b) $x \leq 1 - 2x$, c) $x^2 \neq 1$

Podemos decir que dos desigualdades lo son *en el mismo sentido si* $a < b$ y $c < d$, o también $a > b$ y $c > d$. Por ejemplo $5 > 2$ y $9 > -2$.

Dos desigualdades lo son en *sentido contrario* si son del tipo $a > b$ y $c < d$, por ejemplo $8 < 10$ y $3 > 0$. Podemos llamar ha este tipo de desigualdades, que incluyen los signos $<$ y $>$, *definidas*, en tanto que aquellas que incluyen los signos $\leq$ y $\geq$ pueden ser llamadas *indefinidas.*

1.3.3. PROPIEDADES DE LAS DESIGUALDADES

Las propiedades que más se utilizan en la solución de desigualdades son las siguientes:

1. Si $a > b$, entonces $b < a$. Ejemplo $5 > 3$, entonces $3 < 5$. Del mismo modo, si $a > b$ y $b > c$, entonces $a > c$. Ejemplo: $5 > 3$ y $3 > 2$, entonces $5 > 2$.
2. Las desigualdades anteriores se pueden unir en forma *anidada* como: $a > b > c$, o bien $a < b < c$.
3. Si $a > b$ y n es un número real cualquiera, entonces es válida la operación: $a + n > b + n$. Lo cual significa que a ambos miembros de la desigualdad se les puede sumar o restar un número y como resultado se obtendrá una desigualdad en el mismo sentido. Ejemplo $5 > -1$, si sumamos en ambos lados el número $n = 3$, tendremos: $5 + 3 > -1 + 3$, o sea, $8 > 2$.
4. Si $a > b$ y n es un número positivo: $an > bn$, lo cual significa que el sentido de la desigualdad no se altera. Al multiplicar ambos miembros de una desigualdad por un número negativo $n < 0$ el sentido de la desigualdad cambiará, es decir, si $a > b$ y $n < 0$, se tiene que $an < bn$. Ejemplo $5 > 1$ al multiplicar por -5, obtenemos $-25 < -5$, lo cual es verdadero. Pruébese con un ejemplo que lo mismo ocurre al dividir una desigualdad por $n < 0$.
5. Suma de desigualdades. Dos desigualdades en un mismo sentido se pueden sumar miembro a miembro de manera que se obtenga una desigualdad en el mismo sentido: Si $a > b$ y $c > d$ entonces $a + c > b + d$. Ejemplo, si $4 > 2$ y $0 > -1$ entonces $4 + 0 > 2 + (-1)$, o bien $4 > 2$. El ejemplo pone en evidencia la resta de desigualdades en el mismo sentido.
6. Resta de desigualdades. Dos desigualdades en sentido contrario se pueden restar miembro a miembro, dando por resultado una desigualdad del mismo sentido que la primera de las desigualdades. Si $a > b$ y $c < d$, y de la primera restamos la segunda, $a - c > b - d$. Ejemplo, $7 > 1$ y $2 < 5$, obtenemos $7 - 2 > 1 - 5$, o sea: $5 > -4$.
7. Multiplicación de desigualdades. Dos desigualdades de igual sentido se pueden multiplicar entre sí miembro a miembro si todos sus miembros son positivos, dando por resultado una desigualdad del mismo sentido. Si $a < b$ y $c < d$ (siendo $a > 0$ y $c > 0$) entonces $ac < bd$. Ejemplo $3 < 5$ y $8 < 10$, luego $3(8) < 5(10)$, es decir: $24 < 50$.
8. División de desigualdades. Dos desigualdades de sentido contrario se pueden dividir miembro a miembro si todos los miembros de la desigualdad son números positivos, como resultado se obtendrá una desigualdad en el sentido de la primera de ellas. Si $a > b$ y $c < d$ (con $b > 0$ y $c > 0$) entonces: $\frac{a}{c} > \frac{b}{d}$. Ejemplo $5 > 1$ y $2 < 7$. Luego $\frac{5}{2} > \frac{1}{7}$.

1.3.4. SOLUCIÓN DE DESIGUALDADES DE PRIMER ORDEN

Como en las ecuaciones comunes, se trata de transformar la desigualdad en varios pasos hasta que el conjunto solución sea obvio. Las herramientas principales son las propiedades vistas en el rubro anterior.

Enseguida te mostramos algunos ejemplos resueltos sobre casos de desigualdades de primer orden:

EJEMPLO 1

Encuéntrese el conjunto solución para la desigualdad $2 + 3x < 5x + 8$.

SOLUCIÓN:

Como cuando operamos ecuaciones, dejemos de un sólo lado de la desigualdad los valores de x; es costumbre dejarlos en el miembro izquierdo, colocando los valores numéricos en el lado derecho, así queda:

$$3x - 5x < 8 - 2$$

O sea:

$$-2x < 6$$

Multiplicando ambos miembro por (-1), resulta:

$$2x > -6$$

Despejando el valor de x (ojo, x NO puede despejarse si es negativa, antes hay que multiplicar por (-1)), queda:

$$x > -\frac{6}{2}, \text{ o sea } x > -3$$

El conjunto solución se escribe como un *intervalo* en la forma S: $(-3, \infty)$, lo cual significa que la solución es el conjunto de valores de x contenido en ese segmento de recta, y el símbolo de infinito (∞) sugiere, como vimos en la sección 1.3.2, que la solución es inconmensurable y sin límite en un extremo.

Gráficamente la solución se puede expresar como se aprecia en la Figura 1.10.

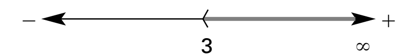


FIGURA 1.10. La solución de la desigualdad está en el semiintervalo $(3, \infty)$

Para probar que efectivamente esa es la solución, y no equivocamos el procedimiento, basta con tomar un valor del conjunto solución y sustituirlo en la desigualdad original para verificar que esta se cumple. Por ejemplo, tomemos del conjunto solución el valor de $x = 0$ y sustituyámosle en $2 + 3x < 5x + 8$, nos queda $2 < 8$, lo cual es verdadero.

EJEMPLO 2

Encontrar el conjunto solución de la desigualdad *anidada* siguiente: $4 < 3x - 2 \leq 10$.

SOLUCIÓN:

El procedimiento para llegar al intervalo solución consiste en operar al mismo tiempo en los tres miembros de la desigualdad, es decir, cualquier operación que se haga en la desigualdad deberá ser la misma en los tres miembros, intentando despejar x respetando en todos los casos las propiedades antes vistas. Hagamos:

Sumando 2 en cada caso:

$$4 + 2 < 3x - 2 + 2 \leq 10 + 2$$

Queda:

$$6 < 3x \leq 12$$

Dividiendo por 3:

$$\frac{6}{3} < x \leq \frac{12}{3}$$

El conjunto solución está dado por:

$$2 < x \leq 4$$

Lo podemos escribir como:

$$S: (2, 4]$$

O bien con el semi-intervalo:



FIGURA 1.11. La solución está en el intervalo (2, 4].

EJEMPLO 3

Resolver la desigualdad $\frac{-2x + 1}{3} - \frac{x + 5}{4} \leq 0.$

Se tiene que: $\frac{-8x + 4 - 3x - 15}{12} \leq 0.$

O bien $\frac{-11x - 11}{12} \leq 0.$

Quedando: $-\frac{11}{12}x - \frac{11}{12} \leq 0$

Multiplicamos por (-1) y cambiamos el símbolo de la desigualdad:

$$\frac{11}{12}x + \frac{11}{12} \geq 0$$

Nos queda la solución: $\frac{11}{12}x \geq -\frac{11}{12}$, o bien: $x \geq -1$.

El intervalo solución es: $[-1, \infty)$.
En tanto que en el segmento, esta queda como:

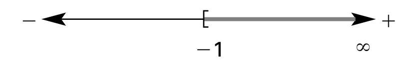


FIGURA 1.12. Solución dada al semiintervalo cerrado por la izquierda $[-1, \infty)$.

¿Para qué valores de x la expresión $\sqrt{x - 3}$ contiene resultados reales? Si sustituimos algunos valores de x en la expresión se observa con claridad que x no puede tomar valores menores que 3, porque el resultado no sería un número real, sino imaginario, como por ejemplo $\sqrt{-1}$ en el caso $x = 2$. Sin embargo, puede tomar valores de 3 en adelante que evitarían el problema con este tipo de números.

De lo anterior se desprende la proposición:

Para que el resultado de una raíz cuadrada sea un número real, el valor de la expresión contenida en ella tiene que ser positivo o cero.

[1-11]

Para el caso que nos ocupa, esto último se escribe de la siguiente manera:

$$x - 3 \geq 0$$

Resolviendo la desigualdad, obtenemos: $x \geq 3$.

De modo que el conjunto solución, es decir, aquellos valores que NO permiten que las raíces resultantes sean imaginarias, es: $[3, \infty)$. El segmento que le corresponde se coloca en la Figura 1.13.

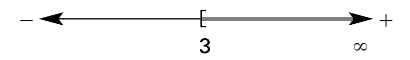


FIGURA 1.13. Los valores solución de $\sqrt{x - 3}$ son aquellos determinados por $x - 3 \geq 0$.

EJEMPLO 4

Resolver la desigualdad $\sqrt{5 - 3x} \leq 1$.

SOLUCIÓN:

Elevemos al cuadrado ambos miembros de la desigualdad:

$$(\sqrt{5 - 3x} \leq 1)^2$$

(¡Ojo!, al elevar al cuadrado cambia el símbolo de la desigualdad, solamente en el caso que sea menor o igual que cero):

Nos queda:

$$5 - 3x \geq 1$$

O bien:

$$3x \leq 4$$

$$x \leq \frac{4}{3}$$

Es decir, el intervalo:

$$S\!: \left(-\infty, \frac{4}{3}\right]$$

1.3.5. DESIGUALDADES DE SEGUNDO ORDEN Y DESIGUALDADES QUE CONTIENEN COCIENTES

De la misma manera que nos preguntamos por los valores reales de x que hacen válida la expresión $\sqrt{x-3}$, lo podemos hacer por los valores de x que hacen válida la raíz cuyo contenido es una expresión cuadrática, como por ejemplo: $\sqrt{x^2-5x+4}$. De igual forma que en el ejemplo anterior, esto será posible solamente cuando $x^2-5x+4 \geq 0$.

Para encontrar el conjunto solución, nos conviene factorizar la ecuación cuadrática como: $(x-4)(x-1) \geq 0$. A este último producto le podemos asociar las propiedades del producto de los signos, toda vez que las podemos asumir a los símbolos $>, <, \geq, \leq$, como sigue:

Reglas de los símbolos $>$, $<$, $\geq$ y $\leq$

$+ \cdot + = +$ En analogía con: $\geq \cdot \geq = \geq$. O bien: $> \cdot > = >$

$- \cdot - = +$ En analogía con: $\leq \cdot \leq = \geq$. O bien: $< \cdot < = >$

$+ \cdot - = -$ En analogía con: $\geq \cdot \leq = \leq$. O bien: $> \cdot < = <$

$- \cdot + = -$ En analogía con: $\leq \cdot \geq = \leq$. O bien: $< \cdot > = <$

[1-12]

Estas propiedades se pueden extender a los casos de desigualdades que contienen cocientes. La tabla correspondiente queda como se ve enseguida:

$\frac{+}{+} = +$ En analogía con: $\frac{\geq}{\geq} = \geq$. O bien: $\frac{>}{>} = >$

$\frac{-}{-} = +$ En analogía con: $\frac{\leq}{\leq} = \geq$. O bien: $\frac{<}{<} = >$

$\frac{+}{-} = -$ En analogía con: $\frac{\geq}{\leq} = \leq$. O bien: $\frac{>}{<} = <$

$\frac{-}{+} = -$ En analogía con: $\frac{\leq}{\geq} = \leq$. O bien: $\frac{<}{>} = <$

[1-13]

Solución del caso $x^2 - 5x + 4 \geq 0$

EJEMPLO 1

Resolver la desigualdad: $(x - 4)(x - 1) \geq 0$.

SOLUCIÓN:

Para el caso: $(x - 4)(x - 1) \geq 0$, el producto debe ser mayor o igual que cero o positivo, lo cual se verifica en los dos primeros casos de la proposición [1-12]. Es decir: 1) $\geq \cdot \geq = \geq$ y 2) $\leq \cdot \leq = \geq$. Atendamos cada uno de estos:

1. $\geq \cdot \geq = \geq$, indica que: $x - 4 \geq 0$, o bien $x \geq 4$ y $x - 1 \geq 0$, o bien $x \geq 1$.
Ambas soluciones se intersecan en el intervalo S_1: $[4, \infty)$, es decir, es el lugar de la recta numérica donde se *empalman*, siendo esta la primera parte de la solución.

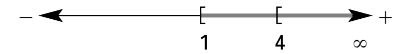


FIGURA 1.14. Para el primer caso, la intersección de las soluciones da por solución parcial S_1: $[4, \infty)$.

2. $\leq \cdot \leq = \geq$, indica que: $x - 4 \leq 0$, o bien $x \leq 4$ y $x - 1 \leq 0$, o sea $x \leq 1$.
Ambas soluciones se intersecan en el intervalo S_2: $(-\infty, 1]$, cual es la segunda parte de la solución.

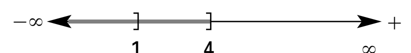


FIGURA 1.15. Para el segundo caso, la intersección de las soluciones da por solución parcial S_2: $(-\infty, 1]$.

De modo que la solución sea la suma o unión $S = S_1 + S_2$, es decir: $S = (-\infty, 1] + [4, \infty)$. Representado por el intervalo de la Figura 1.16:

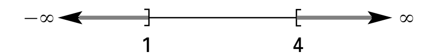


FIGURA 1.16. La suma $S = S_1 + S_2$ de las soluciones parciales es la solución de la desiguldad.

EJEMPLO 2

Resuélvase la desigualdad $x^2 + 2x - 48 < 0$.

SOLUCIÓN:

Esta última puede ser escrita como: $(x - 6)(x + 8) < 0$, de la cual se desprenden las opciones: 1) $> \cdot < = <$ y 2) $< \cdot > = <$, vistas en la proposición [1-13]. Analicemos cada caso:

1. La opción $> \cdot < = <$ sugiere que $x - 6 > 0$, o bien: $x > 6$ y $x + 8 < 0$, o $x < -8$.
Ambos resultados no se intersecan, lo cual determina una solución vacía que escribiremos como: S_1: ϕ.

FIGURA 1.17. S_1 es solución vacía puesto que no hay intersección.

2. La opción $< \cdot > = <$ nos da para escribir $x - 6 < 0$ o $x < 6$ y $x + 8 > 0$ o $x > -8$.



FIGURA 1.18. S_2 es solución única.

Ambos resultados se intersecan en el intervalo abierto S_2: $(-8, 6)$.
Luego la solución está dada por la suma $S = S_1 + S_2$, es decir:

$$S: (-8, 6)$$

EJEMPLO 3

Encuéntrese el conjunto solución para $\sqrt{x^2 + 8x + 1}$.

SOLUCIÓN:

De la expresión en el radical se desprende que $x^2 + 8x + 1 \geq 0$. No obstante, obsérvese que cualquier valor de x que se sustituya en la expresión da por resultado un valor numérico mayor que cero. Incluso, la expresión cuadrática no se puede factorizar a través de valores reales, solamente con números imaginarios. Consecuentemente, podemos afirmar que el conjunto solución buscado es el conjunto de todos los números reales $\mathbb{R}$.

EJEMPLO 4

Resolver la desigualdad $\dfrac{x+1}{x-8} \geq 0$.

SOLUCIÓN:

De la proposición [1-13] se desprenden los casos 1) $\dfrac{\geq}{\geq} = \geq$, y 2) $\dfrac{\leq}{\leq} = \geq$. Analicemos ambos:

1. La opción $\dfrac{\geq}{\geq} = \geq$ sugiere que $x + 1 \geq 0$, o bien: $x \geq -1$ y $x - 8 \geq 0$, o sea $x \geq 8$, pero en este último caso si aceptamos el valor de $x = 8$ caeremos en la contradicción de la división por cero, puesto que el denominador de la desigualdad quedaría con ese valor. De aquí que el divisor $x - 8$ está condicionado a ser estrictamente mayor que cero, es decir: $x - 8 > 0$ o bien $x > 8$.
La intersección de las relaciones $x \geq -1$ y $x > 8$ nos arroja S_1: $(8, \infty)$ como primera parte de la solución.

FIGURA 1.19. S_1 es la primera parte de la solución para el cociente $\dfrac{x+1}{x-8} \geq 0$.

2. El caso $\frac{\leq}{\leq} = \geq$, nos permite las posibilidades: $x + 1 \leq 0$ o $x \leq -1$ y $x - 8 < 0$ (estrictamente) o bien $x < 8$.
La intersección de las relaciones $x \leq -1$ y $x < 8$ nos arroja S_2: $(-\infty, -1]$ como segunda parte de la solución.

$-\infty$ -1

FIGURA 1.20. S_2 es la segunda parte de la solución para el cociente $\frac{x + 1}{x - 8} \geq 0$.

Siendo la solución buscada la suma de las soluciones $S = S_1 + S_2$, es decir:

$$S = (-\infty, -1] + (8, \infty)$$

Como se aprecia en la Figura 1.21.

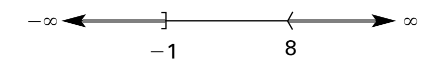


FIGURA 1.21. $S = S_1 + S_2$

EJEMPLO 5

Resuélvase la desigualdad $\frac{x - 3}{x + 1} < 2$.

SOLUCIÓN:

Los pasos a seguir consisten en pasar el 2 al miembro izquierdo, sacar común denominador y operar como en el ejemplo anterior. Es decir:

$$\frac{x - 3}{x + 1} - 2 < 0$$

Siendo $x + 1$ el común denominador:

$$\frac{x - 3 - 2(x + 1)}{x + 1} < 0$$

Queda como:

$$\frac{-x - 5}{x + 1} < 0$$

De esta última desigualdad, tenemos las opciones: 1) $\frac{>}{<} = <$ y 2) $\frac{<}{>} = <$. Analicemos cada caso:

1. Para $\frac{>}{<} = <$ se sugiere que $-x - 5 > 0$, o bien $x < -5$ y $x + 1 < 0$, o sea, $x < -1$ (obsérvese que en este caso no tenemos el problema de la división por cero). La intersección de $x < -5$ otorga por primera parte de la solución:

$$S_1: (-\infty, -5)$$

2. En tanto que $\frac{<}{>} = <$ nos da para disponer $-x - 5 < 0$ o $x > -5$ y $x + 1 > 0$ o $x > -1$. Siendo la intersección de ambas opciones la segunda parte de la solución, es decir:

$$S_2 = (-1, \infty)$$

Consecuentemente, la solución es la suma $S = S_1 + S_2$. O bien:

$$S = (-\infty, -5) + (-1, \infty)$$

Como se aprecia en la Figura 1.22.

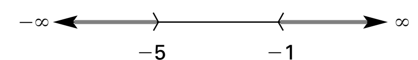


FIGURA 1.22. Solución gráfica de la desigualdad para el cociente $\frac{x-3}{x+1} < 2$.

EJEMPLO 6

Los casos siguientes $\frac{1}{\sqrt{x^2 - 3x + 2}}$, así como $\frac{1}{x-1}$, precisan de cuidar que las expresiones en el denominador no valgan cero. Así, en la primera de estas $x^2 - 3x + 2$ debe ser estrictamente mayor que cero, es decir: $x^2 - 3x + 2 > 0$. En tanto que para la

EJEMPLO 7

Resolver la desigualdad $\frac{x+1}{x^2 - 3x - 18} \geq 0$.

SOLUCIÓN:

Factorizando el denominador, nos queda:

$$\frac{x+1}{(x-6)(x+3)} \geq 0$$

De esta se desprenden las opciones: 1) $\frac{\geq}{\geq} = \geq$ y 2) $\frac{\leq}{\leq} = \geq$, planteadas en la proposición [1-13]. Abordemos ambos casos:

1. $\frac{\geq}{\geq} = \geq$. Esto es: $x + 1 \geq 0$ o A) $x \geq -1$ y, estrictamente $(x - 6)(x + 3) > 0$. Esta última tiene dos opciones:

B) $(x - 6) > 0$ y $(x + 3) > 0$

De donde:

$$x > 6 \text{ y } x > -3$$

Las cuales tienen por solución parcial el intervalo:

$$S_{\text{parcial1}}: (6, \infty)$$

C) $(x - 6) < 0$ y $(x + 3) < 0$

O bien:

$$x < 6 \text{ y } x < -3$$

Siendo el intervalo solución:

$$S_{\text{parcial2}}: (-\infty, -3)$$

De ambos casos se desprende la solución parcial:

$$S_{\text{parcial}}: (-\infty, -3) + (6, \infty)$$

Intersecando esta última con A) $x \geq -1$ nos quedará la primera parte de la solución buscada, es decir:

$$S_1: (6, \infty)$$

2. $\dfrac{\leq}{\leq} = \geq$. Esto es: $x + 1 \leq 0$, o sea, A) $x \leq -1$ y, estrictamente $(x - 6)(x + 3) < 0$. Esta última tiene las opciones:

B) $x - 6 < 0 \quad x + 3 > 0$

De donde:

$$x < 6 \quad \text{y} \quad x > -3$$

Las cuales tienen por solución parcial el intervalo:

$$S_{\text{parcial1}}: (-3, 6)$$

C) $(x - 6) > 0$ y $x + 3 < 0$

Es decir:

$$x > 6 \quad \text{y} \quad x < -3$$

Siendo el intervalo solución:

$$S_{\text{parcial2}}: (6, \infty)$$

Luego tenemos que la solución parcial es:

$$S_{\text{parcial}}: (-3, 6) + (6, \infty)$$

Intersecando esta última con A) $x \leq -1$ nos quedará la segunda parte de la solución buscada, la cual es vacía, puesto que no existe intersección, es decir:

$$S_2: [-3, -1]$$

La suma $S = S_1 + S_2$ es la solución de la desigualdad original, quedando esta como:

$$S: [-3, -1] + (6, \infty)$$

Conviene siempre probar con alguno de los valores contenidos en el intervalo.

1.4. VALOR ABSOLUTO Y SUS PROPIEDADES

1.4.1. CONCEPTO DE VALOR ABSOLUTO Y PROPIEDADES

La noción de valor absoluto surge de la condición de que toda cantidad, naturalmente de las que se estudian en la física y en los cursos de ingeniería, debe ser positiva. En el caso que vimos de la diferencia $3 - 8 < 0$, la distancia entre ambos valores es negativa; no obstante, a efectos prácticos es necesario concebirle con valor positivo. Casos concretos de distancias bajo esta condición pueden ser las longitudes de los lados en los terrenos planos, la distancia de la Tierra a la Luna tomada positiva como T-L (Tierra-Luna) y negativa como L-T (Luna-Tierra), los valores positivo y negativo que toma el resultado de la raíz $\sqrt{4} = \pm 2$, suponiendo que este refiere un resultado concreto de una magnitud real, etc. En este sentido, podemos decir que los valores negativos en las cantidades son sujetos a *convenciones* que hacemos con ellos al considerarlos en los casos prácticos positivos.

De aquí que la diferencia $3 - 8 = -5$, condicionada como una longitud, debe escribirse como $|-5| < 0$, lo cual indica su naturaleza como cantidad, en tanto que el signo negativo asociado deja ver que la diferencia se realizó en un sentido, o sea, restando el valor numérico menor del mayor, lo cual pudo ocurrir al contrario. De la misma forma podemos escribir $\sqrt{4}$ asociándole el valor absoluto como: $\sqrt{4} = |2|$.

Luego, podemos introducir el concepto de valor absoluto de un número como:

La distancia de un punto x *al origen, considerada como positiva, se llama valor absoluto de* x, y *se indica con el símbolo* $|x|$ *si* $x \geq 0$*, así se tiene que* $|x| = x$, *y si* $x < 0$*, entonces* $|x| = -x$.

[1-14]

Esto está contenido en la siguiente expresión:

$$|x| = \begin{cases} x, \text{ si } x \geq 0 \\ -x, \text{ si } x < 0 \end{cases} \qquad [1\text{-}15]$$

Propiedades del valor absoluto

Algunas propiedades importantes, que dejaremos sin demostrar, son descritas a continuación:

1-9. De la definición inicial 1.14 se deduce la correlación siguiente: $x \leq |x|$. Por ejemplo $|-5| \geq -5$.

1-10. $\sqrt{x} = |x|$. Ejemplo $\sqrt{4} = \begin{cases} 2, \text{ si } x \geq 0 \\ -2, \text{ si } x < 0 \end{cases}$

1-11. $|x + y| < |x| + |y|$

1-12. $|x| - |y| \leq |x - y|$

1-13. $|xy| = |x|\,|y|$

1-14. $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}$

1.4.2. SOLUCIÓN DE DESIGUALDADES CON VALOR ABSOLUTO

Un primer método para resolver este tipo de desigualdades, es hacer un uso *lógico* de la definición [1-15] que vimos anteriormente:

$$|x| = \begin{cases} x, \text{ si } x \geq 0 \\ -x, \text{ si } x < 0 \end{cases}$$

EJEMPLO 1

Resolver la desigualdad con valor absoluto $|3x - 5| < 3$.

SOLUCIÓN:

Dividiremos la solución de $|3x - 5| < 3$ en dos partes:

1. Si consideramos la primera condición de la definición de valor absoluto: x, si $x \geq 0$, diremos que la expresión que se encuentra dentro del valor absoluto de $|3x - 5| < 3$, será positiva si $3x - 5 \geq 0$, o bien $x \geq \frac{5}{3}$. Por lo que llamaremos *condición* para la primera parte de la definición, la cual sujeta a la propia solución**.** Ahora, puesto que hemos condicionado la solución para que el valor interior del valor absoluto sea positivo, dejemos positiva la expresión original, o sea: $3x - 5 < 3$, de la que se desprende que $x < \frac{8}{3}$:

Si intersecamos este último con el valor $x \geq \frac{5}{3}$ de la condición, obtendremos una primera parte de la solución: S_1:$\left[\frac{5}{3}, \frac{8}{3}\right)$ indicado en el semi-intervalo de la Figura 1.23.

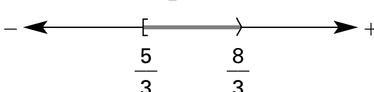


FIGURA 1.23. Primera parte de la solución.

2. Tomando en cuenta que la segunda condición de la definición de valor absoluto es $-x$, si $x < 0$, entonces dejaremos menor que cero la expresión contenida en $|3x - 5| < 3$, como $(3x - 5) < 0$; lo cual nos lleva a la condición $3x - 5 < 0$, o bien: $x < \frac{5}{3}$.

Por tanto, dejaremos negativa la parte interior de la desigualdad original como $-(3x - 5) < 3$; lo cual nos conduce a: $x < \frac{2}{3}$.

Si intersecamos este último valor con la condición nos quedará la segunda parte de la solución: S_2: $\left(\frac{2}{3}, \frac{8}{3}\right)$.

$-$ $+$

$\frac{2}{3}$ $\frac{8}{3}$

FIGURA 1.24. Segunda parte de la solución.

Luego la solución buscada de la desigualdad será la suma de las soluciones parciales S_1: $\left[\frac{5}{3}, \frac{8}{3}\right)$ y S_2: $\left(\frac{2}{3}, \frac{8}{3}\right)$.

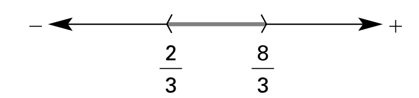


FIGURA 1.25. Solución gráfica de la desigualdad $|3x - 5| < 3$.

Esto es el intervalo abierto: S: $\left(\frac{2}{3}, \frac{8}{3}\right)$.

Otras propiedades para el valor absoluto

Por otro lado, de la definición de valor absoluto se desprenden otras propiedades que nos serán de utilidad, como las siguientes:

1-16. $|x| < a$, sí y solo sí, $-a < x < a$, con $a > 0$

1-17. $|x| \leq a$, sí y solo sí $-a \leq x \leq a$

1-18. $|x| > a$, sí y solo sí $x > -a > x > a$

1-19. $|x| \geq a$, sí y solo sí $-a \geq x \geq a$

Utilizando estas últimas es más sencillo resolver la desigualdad anterior. Por la propiedad 1.16 esta se puede arreglar en forma anidada como:

$$-3 < 3x - 5 < 3$$

Sumando 5 en cada miembro:

$$-3 + 5 < 3x < 3 + 5$$
$$2 < 3x < 8$$

Dividiendo por 3 queda la solución deseada (confróntese con la solución determinada por el método *lógico* anterior):

$$\frac{2}{3} < x < \frac{8}{3}$$

EJEMPLO 2

Resolver la desigualdad $|4x - 2| \geq 3x + 1$.

SOLUCIÓN:

Con la regla 1-19 resulta sencillo resolverla, coloquémosla en forma anidada, como:

$$-(3x + 1) \geq 4x - 2 \geq 3x + 1$$

O sea:

$$-3x - 1 \geq 4x - 2 \geq 3x + 1$$

Sumando 2 en los tres miembros:

$$-3x - 1 + 2 \geq 4x \geq 3x + 1 + 2$$

$$-3x + 1 \geq 4x \geq 3x + 3$$

En este último paso hay que resolver por separado ambas desigualdades. Nos queda:

Para el lado izquierdo:

$$-4x - 3x \geq -1$$

Para el lado derecho:

$$4x - 3x \geq 3$$

Es decir:

$$x \leq \frac{1}{7}, \text{ o } S_1: \left(-\infty, \frac{1}{7}\right)$$

$$x \geq 3, \text{ luego: } S_2: (3, \infty)$$

De manera que la solución es la suma de las soluciones parciales S: $S_1 + S_2$, o bien:

$$S: \left(-\infty, \frac{1}{7}\right) + (3, \infty)$$

EJEMPLO 3

Resolver la desigualdad: $\dfrac{|x - 1|}{x} < 1$.

SOLUCIÓN:

A partir de la definición de valor absoluto dada en [1-15], esta última tiene las opciones:

$$\begin{cases} 1. \ \dfrac{x - 1}{x} < 1, & \text{si } x - 1 \geq 0, \text{ o } x \geq 1 \\ 2. \ \dfrac{-(x - 1)}{x} < 1, & \text{si } x - 1 < 0, \text{ o } x < 1 \end{cases}$$

Analicemos ambos casos:

1. $\dfrac{x - 1}{x} < 1$ condicionada por $x \geq 1$.

Pasando 1 al miembro izquierdo queda:

$$\frac{x - 1 - x}{x} < 0$$

Es decir: $\frac{-1}{x} < 0$, la solución de esta última desigualdad es válida para toda $x > 0$.
Intersecando con la condición $x \geq 1$, nos queda la primera parte de la solución: S_1: $[1, \infty)$

2. $\frac{-(x - 1)}{x} < 1$ condicionada por $x < 1$.
En el primer caso queda que:

$$\frac{-2x + 1}{x} < 0$$

De esta se desprenden dos opciones:

A) $-2x + 1 > 0$ y $x < 0$

O bien:

$$x < \frac{1}{2} \text{ y } x < 0$$

Siendo:

$$S_{\text{parcial1}}: (-\infty, 0)$$

B) $-2x + 1 < 0$ y $x > 0$, quedando:

$$x > \frac{1}{2} \text{ y } x > 0$$

De modo que:

$$s_{\text{parcial2}}: \left(\frac{1}{2}, \infty\right)$$

Luego: $S_{\text{parcial}}: (-\infty, 0) + \left(\frac{1}{2}, \infty\right)$
Intersecando esta última con la condición $x < 1$, nos queda la segunda parte de la solución:

$$S_2: (-\infty, 0) + \left(\frac{1}{2}, 1\right]$$

La solución $S = S_1 + S_2$, queda como:

$$S: (-\infty, 0) + \left(\frac{1}{2}, \infty\right)$$

EJEMPLO 4

Diariamente seis camiones recolectores recogen entre 800 kg, y 1.000 kg, de basura en un sector de la ciudad por día. Si la mitad de los camiones recogen el doble que los demás: ¿entre qué valores, en la recolección de basura, se encuentran los camiones recolectores que recogen más rápido?

SOLUCIÓN:

Consideremos por x los camiones que recogen la basura más rápido, y por y aquellos que lo hacen más lento. Luego podemos escribir la recolección de basura diaria en términos de la desigualdad:

$$800 \leq 3x + 3y \leq 1.000$$

Y, puesto que los camiones más rápidos x recogen el doble que los más lentos y, x está en proporción de 1:2 con respecto a y, o bien $y = \frac{1}{2}x$. Sustituyendo esta última en la desigualdad, queda:

$$800 \leq 3x + 3\left(\frac{1}{2}x\right) \leq 1.000$$

$$800 \leq 3x + \frac{3}{2}x \leq 1.000$$

$$800 \leq \frac{9}{2}x \leq 1.000$$

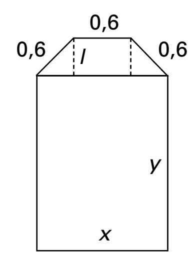
$$1.600 \leq 9x \leq 2.000$$

Dividiendo por 3 queda el resultado buscado. Es decir, los tres camiones recolectores más rápidos colectan basura diariamente entre:

$$533{,}33 \text{ kg} \leq 3x \leq 666{,}66 \text{ kg}$$

EJEMPLO 5

Se quiere diseñar una ventana como la que se muestra en la figura, con la parte superior coronada con un semihexágono. La ventana debe tener un área de 5 m². Si el ancho x solamente puede tomar valores entre 1 m y 1,8 m, encuentre los valores que puede tomar y.



SOLUCIÓN:

Las longitudes extremas de la base hexagonal se establecen a partir de $\left(\frac{x - 0{,}6}{2}\right)$. El área del rectángulo mayor es: $A_R = xy$.

La base l de los triángulos rectángulos que se forman está dada por la relación:

$$l = \sqrt{(0{,}6)^2 - \left(\frac{x - 0{,}6}{2}\right)^2}$$

Por tanto, el área de cada triángulo rectángulo es:

$$A_T = \frac{\left(\frac{x-0{,}6}{2}\right)^2 \cdot \sqrt{(0{,}6)^2 - \left(\frac{x-0{,}6}{2}\right)^2}}{2}$$

En tanto que el área del rectángulo superior se da por:

$$A_r = (0{,}6)\sqrt{(0{,}6)^2 - \left(\frac{x-0{,}6}{2}\right)^2}$$

Luego el área total de la puerta $A = 5$ puede ser descrita como:

$$A = 2A_T + A_r + A_R$$

O sea:

$$\left(\frac{x-0{,}6}{2}\right)^2\sqrt{(0{,}6)^2 - \left(\frac{x-0{,}6}{2}\right)^2} + (0{,}6)\sqrt{(0{,}6)^2 - \left(\frac{x-0{,}6}{2}\right)^2} + xy = 5$$

O bien:

$$\sqrt{(0{,}6)^2 - \left(\frac{x-0{,}6}{2}\right)^2}\left[\left(\frac{x-0{,}6}{2}\right)^2 + 0{,}6\right] + xy = 5$$

Sustituyendo en esta última los valores extremos de x, $1 \leq x \leq 1{,}8$. Para $x = 1$ resulta $y = 4{,}638$ en tanto que para $x = 1{,}8$ $y = 2{,}5$. Luego los valores de y se encuentran entre $2{,}5 \leq y \leq 4{,}638$.

ACTIVIDADES Y EJERCICIOS DE LAS SECCIONES 1.2, 1.3 Y 1.4

I. Revisión de conceptos

1. ¿A la opción de establecer números positivos y negativos en la recta real se le llama? ____________________

2. Da, con tus propias palabras, una explicación de la naturaleza de x en la expresión que resulta de la solución de una desigualdad, por ejemplo en el caso que dice: *x toma un número inconmensurable de valores en el intervalo* (a, b).

3. Anota la solución para $\sqrt{9}$ en términos de la definición de valor absoluto.

4. Anota V (verdadero) o F (falso) para cada una de las siguientes proposiciones:

a) $|x| < c$ es equivalente con $-c < x < c$ ________

b) $|3x - 5| = \begin{cases} 3x - 5 & \text{si } 3x - 5 > 0 \\ -(3x - 5) & \text{si } 3x - 5 < 0 \end{cases}$ ________

c) $-2 \leq \dfrac{x+4}{x-1} \leq 2 \Leftrightarrow \left|\dfrac{x+4}{x-1}\right| \leq 2$

II. Actividades y ejercicios

1. Describe con una desigualdad cada una de las siguientes oraciones.

a) *De mi casa al ITCh II tardo entre 20 y 25 minutos.*
b) *Diariamente me ejercito alrededor de 50 minutos o una hora.*
c) *Tardo en bañarme entre 7 y 10 minutos.*
d) *Una mosca vive, a lo más, 48 horas.*
e) *Una computadora, después de encenderse, tarda en estar lista para ser usada entre dos y tres minutos.*

2. Encuentra el intervalo solución de cada una de las siguientes desigualdades. Grafícales sobre la recta real.

a) $2x + 3 \leq 3x - 2$
b) $3x + 7 \geq 5x - 7$
c) $2x - 3 + x < -x + 5$
d) $-\frac{3}{2}x < x - 6$
e) $4 < 2x - 3 < 5$
f) $3x > 4$ y $x > 3x - 2$
g) $x + 3 > 0$ y $x - 2 > 0$.
La solución es la intersección.
h) $3 - 2x \leq 7x - 1 \leq 3x - 2$
i) $5x - 2 < 0$ o $5 < 2x + 5 < 7$.
La solución es la suma.
j) $\sqrt{x+1}\sqrt{x-1} < 0$
k) $\sqrt{5 - 3x} < -3$
l) $x(x - 7) < 0$
m) $\sqrt{3 - 2x^2} \leq -x + 2$
n) $x^2 + 3x \geq -2$
o) $x^2 - 5x > 0$
p) $(x - 1)(x - 2)(x - 3) < 0$
q) $x^2 - 10x + 100 \geq 0$
r) $\frac{-x^2}{10} + \frac{7x}{10} < 1$
s) $x^2 - 25 \neq 0$
t) $\frac{x - 3}{x + 5} > 0$
u) $\frac{x}{x - 7} \leq -1$
v) $\frac{x + 2}{x - 1} - \frac{x}{x + 1} \geq 0$
w) $\frac{\sqrt{x - 2}}{\sqrt{x + 3}} > 0$
x) $\frac{x^2 - 3x + 1}{x^2 - 1} \leq 1$
y) $\frac{x - 2}{\sqrt{x - 4}} \geq 0$
z) $\left(\frac{2x - 1}{x + 3}\right)^2 < 1$

3. ¿Para qué valores de a tiene sentido la siguiente desigualdad?

$$1 < \frac{3a + 1}{a - 5} < 2$$

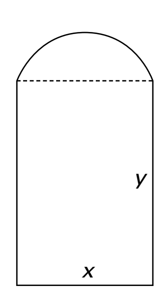
4. Resuelva el siguiente sistema de desigualdades (Resolverle es encontrar la intersección de ambas):

$$\begin{cases} 2x + 3 > 0 \\ 3x + 2 > 0 \end{cases}$$

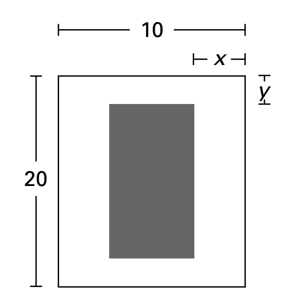
5. Resuelva las siguientes desigualdades con valor absoluto para cada una escriba la solución en un intervalo:

a) $|3x - 2| < 1$
b) $|2x - 5| \geq 1$
c) $|2x - 1| < 3x + 4$
d) $|3 - 2x| \geq 0{,}43$
e) $\dfrac{|x - 1|}{x + 3} \geq 0$
f) $|x - (2x + 1)| < \dfrac{1}{2}x - 3$
g) $\left|\dfrac{x - 1}{x + 1}\right| < 2$
h) $\dfrac{3x - 5}{|x + 1|} < 2$
i) $\left|\dfrac{1}{x} + x\right| \leq 3$
j) $|x + 4| > |3 - 5x|$

6. Se quiere diseñar una ventana como la que se muestra en la figura, con la parte superior coronada con un semicírculo. La ventana debe tener un área de 4 m². Si el ancho x solamente puede tomar valores entre 1 m y 1,8 m, encuentre los valores que puede tomar y.



7. Una placa fotográfica de 20 cm, por 10 cm, debe contener un margen de ancho y entre 1,5 cm y 2,5 cm, en las partes superior e inferior y x cm, en cada lado. Si el área útil de la fotografía debe ser de 150 cm². ¿Cuáles son los posibles valores que puede tomar y.

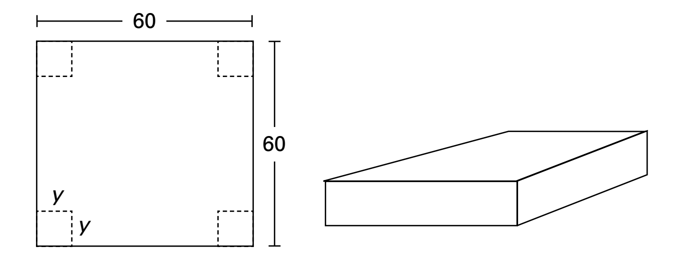


III. Problemas para examen

1. La temperatura que se usa en la escala Fahrenheit es F grados, en tanto que la que se usa en centígrados es C grados. Si la relación entre ambos sistemas se da por: $C = \dfrac{5}{9}(F - 32)$, encuentre la variación de valores de temperatura de F, si C se encuentra entre 0 y 15.

2. Se desea construir una caja abierta con un pedazo cuadrado de cartón cuyo lado es de 60 cm, cortando cuadrados iguales en las esquinas (véase la figura).

a) Determine una fórmula para el volumen V de la caja.
b) ¿Si el valor de y se coloca entre $10 \leq y \leq 20$, entre que valores se coloca el volumen V?



3. Resuelva las desigualdades siguientes:

a) $2x - 3 \leq 5 - 3x$

b) $-2 < 3x + 5 < 2x - 1$

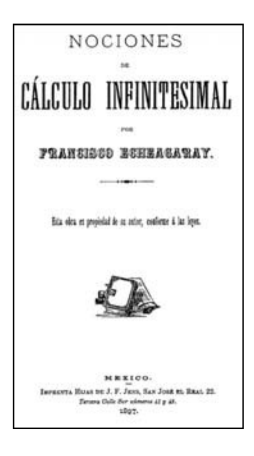
c) Encontrar los valores de x para los cuales la expresión $\sqrt{x^2 + 2x - 3}$ tiene sentido.

d) $|-3x + 2| \leq 4$

$\left|\dfrac{3x - 1}{x + 2}\right| \geq 1$

Funciones

2


NOCIONES
DE
CÁLCULO INFINITESIMAL
POR
FRANCISCO ECHEAGARAY.

Esta obra es propiedad de su autor, conforme á las leyes.

MEXICO.
Imprenta Hijas de J. F. Jens, San José el Real 22.
1897.

«Cuando dos cantidades están ligadas de tal manera, que dándose el valor de una de ellas, se pueda determinar el valor correspondiente de la otra, se dice que cada una de las variables es función de la otra. Si y se expresa inmediatamente, como en las ecuaciones siguientes:

$$y = ax,\ y = \frac{a}{x},\ y = x^n,\ y = \log x,\ y = a \operatorname{sen} x$$

se dice que y es una función explícita de x, y se emplean las notaciones $y = f(x)$, $y = F(x)$».

FRANCISCO ECHEAGARAY

La proposición aparece en el libro titulado: *Nociones de cálculo infinitesimal.* Imprenta Hijas de J. F. Jens, México, 1897, pág. 12. Texto de cálculo escrito por Echeagaray para la enseñanza del cálculo infinitesimal en la Escuela Nacional Preparatoria. Echeagaray fue director de la E. N. P durante el efímero gobierno de Francisco I Madero.
A falta de un retrato de Echeagaray, incluimos la portada de su obra.

2.1. DEFINICIÓN DE FUNCIÓN

Para dar una definición del concepto de función es necesario primero conocer el significado de otros conceptos involucrados con ella, como son el de *variable*, *variación, variabilidad, dependencia de variables,* etc. Por lo general, autores de libros de texto de cálculo pasan por alto el conocimiento de los tres primeros, dejando un amplio hueco para el entendimiento del concepto en los estudiantes y la propia asignatura. En nuestro caso, la propuesta que planteamos a lo largo de este y los capítulos siguientes, se sujeta a estas tres nociones, debido a que en su conjunto dan para el estudio del movimiento de fenómenos físicos desde varias perspectivas, como son la geométrica, numérica, algebraica y la propia *variacional*, así como su cualidad más importante: la *predicción*. Clasificaremos, con esta idea, los tipos de funciones que son necesarios en un curso de cálculo para ingeniería, definiendo cada una de ellas y planteando ejemplos que permitan su mejor comprensión.

2.1.1. ¿QUÉ SON LAS VARIABLES?

Comenzaremos dando una definición de variable en los siguientes términos:

Una variable x *es una cantidad medible que aumenta o disminuye.*

[2-1]

La cualidad principal de las variables es que representan el movimiento de los fenómenos físicos y geométricos que se estudian a través del cálculo diferencial. No obstante, las variables adoptan el movimiento desde diferentes contextos de la matemática; anotemos los siguientes:

a) *Aritmético:* se conciben como números reales contenidos en la recta real. Por ejemplo, en un segmento de recta, la variable *x se mueve en el intervalo (*a, b*) tomando una cantidad inconmensurable de valores.* La *variación* de *x* en el intervalo (*a, b*) es supuesto por la cantidad de valores que es susceptible de tomar.
b) *Geométrico:* las variables, como *x,* se asignan a las cantidades que cambian o adquieren movimiento en las figuras geométricas. Las figuras suelen ser puntos, distancias, áreas, ángulos, radianes, volúmenes, etc. Otra característica importante es que las magnitudes geométricas como las citadas, pueden *idealizar** cantidades físicas reales. Por ejemplo, las longitudes en el diseño de una caja, el vuelo de un avión, etc.

c) Las variables pueden representar entidades físicas reales. Por ejemplo, la variable *x* da significado a la cantidad de bacterias que crecen exponencialmente en un cultivo (la cantidad de bacterias aumenta); o bien *x* representa la desintegración del carbono-14 en determinado periodo de tiempo (la cantidad carbono-14 disminuye).

Planteamos enseguida algunos ejemplos para entender mejor cada caso, sólo te pedimos que dés oportunidad a tu imaginación para concebirlos.

EJEMPLO 1

Imagina el siguiente problema que involucra movimiento; es del todo geométrico: Supongamos que una curva es descrita por el movimiento de un punto *P* que llamaremos *generador* de la curva (véase Figura 2.1). En su recorrido, el punto generador cambia continuamente de dirección debido a cierta ley que así se lo permite. En este ejercicio, hemos dado libertad al punto *P* para que adquiriera movimiento y así pudiera describir la curva.

El movimiento del punto es semejante al movimiento de la variable *x* en el intervalo (*a, b*) de los ejemplos que vimos en el Capítulo 1.

En este sentido el punto es una cantidad variable que podemos designar por *x*, sólo que, a diferencia del intervalo (*a, b*) donde *x* se mueve sobre la recta real tomando valores numéricos, esta se mueve con diferentes cambios de dirección generando así la curva. En el movimiento del punto que va describiendo la curva: ¿A qué ley obedece el punto? ¿Habrá otras cantidades variables involucradas? ¿Cuáles son estas?

* Idealizar es hacer semejante un modelo con otro.

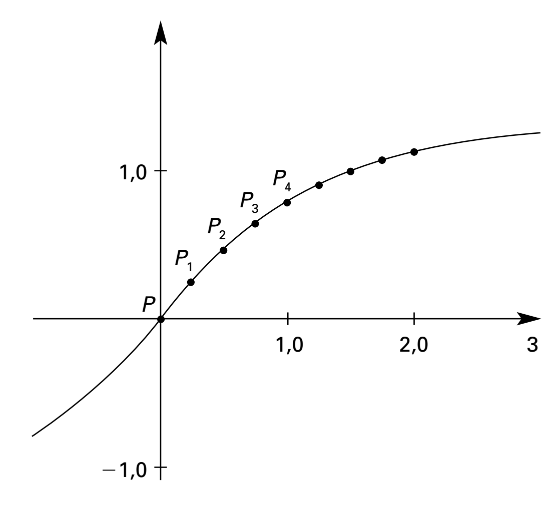


FIGURA 2.1. Curva descrita por el movimiento del punto *P*.

EJEMPLO 2

Imaginemos enseguida un triángulo rectángulo en el cual nos permitiremos dejar fija, y además conocida, una de las distancias; el cateto adyacente a, $a \geq 0$, (a es un número real positivo) y moviéndose el otro, el opuesto, el cual designamos como y, según se aprecia en la Figura 2.2.

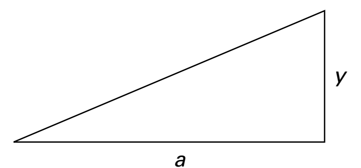


FIGURA 2.2. En el triángulo y es variable en tanto a permanece constante.

Desarrolla las actividades que se piden:

a) Realiza sobre el triángulo una descripción geométrica de la distancia variable y, considerando que aumenta con el movimiento.
b) En este fenómeno, ¿qué otra distancia se puede considerar variable? Asígnale una literal, como por ejemplo z.
c) ¿Cuáles ángulos del triángulo permanecen constantes y cuáles se pueden considerar variables? Asigna literales mayúsculas como A y B a los ángulos que cambian.

El ejemplo 2 nos da para *convenir* que las variables son asignadas generalmente por las últimas literales del alfabeto: w, x, y, z, aunque ello es indistinto, dejándose las primeras a, b, c, para las cantidades que no se mueven, también llamadas constantes.

EJEMPLO 3

Imagina ahora el mismo problema geométrico anterior, sólo que debes considerar que sobre la variable *y* se mueve un cohete que se ha lanzado desde la superficie de la tierra, o sea, desde la base del triángulo, y hay una persona observando el lanzamiento ha una distancia *a* de su inicio.

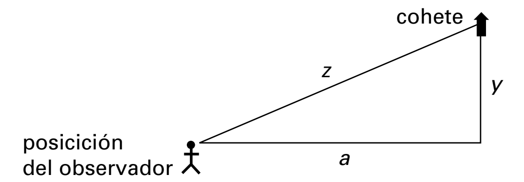


FIGURA 2.3. En el triángulo, *y* y *z* son variables en tanto a permanezca constante.

¿Qué cambia respecto del ejemplo 2? Es obvio que no cambia nada, solamente el contexto del problema.

2.1.2. VARIACIÓN

La imagen del ejemplo 3 anterior es una *variación* o instantánea del movimiento del cohete. Una instantánea es como una fotografía tomada en determinado momento de una de las *variaciones* del suceso.

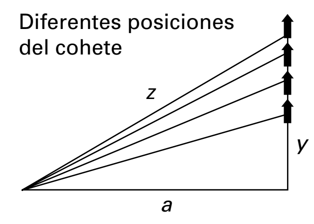


FIGURA 2.4. Las variaciones producidas por el movimiento del cohete permanecen constantes.

Lo interesante del ejercicio es que deja ver cómo las diversas posiciones de las instantáneas permanecen simultáneamente constantes para cada una de las posiciones intermedias. ¿Entiendes esto último? Coméntalo con tus compañeros.

Reproduce en tu cuaderno algunas de esas variaciones y verifica con más detalle qué magnitudes cambian y cuáles no lo hacen.

A partir de lo anterior definiremos la noción de variación de la siguiente manera.

> *Una variación es el cambio de posición o estado de una cantidad.*

[2-2]

2.2. REPRESENTACIÓN DE FUNCIONES: TABLAS, GRÁFICAS, FÓRMULAS Y PALABRAS

En el ejemplo anterior cambiaron de magnitud, o bien de posición, las variables en movimiento: las longitudes y y z, el área del triángulo, etc. No obstante, lo valioso del reconocimiento geométrico que podemos hacer de las variaciones es que más adelante nos permitirán el *estudio analítico* del propio movimiento, es decir, no nos conformaremos solamente con *ver* cómo varían las magnitudes sino que podremos hacer un análisis de ellas.

Otra forma en la que suele representarse la idea de variable se da en un lenguaje simbólico como el que suministra el álgebra y la geometría. Por ejemplo la fórmula:

$$A = \frac{a}{2}y$$

Representa el área del triángulo rectángulo fijo del ejemplo 2, anterior, en el cual a e y pueden ser constantes. Véase la Figura 2.5.

Sin embargo, al declarar inicialmente a y como variable, la fórmula indica la presencia de por lo menos otra variable, como lo es el área A. De manera que tanto A como y están en mutua relación, debido a que para un valor dado de la variable y podemos determinar un valor del área A. Se acostumbra llamar a la variable A, *variable dependiente* (pues depende de y) escribiéndola como $A(y)$, mientras que a y se le llama la *variable independiente*.

Gráficamente la expresión:

$$A(y) = \frac{a}{2}y$$

Es representada por un sinnúmero de variaciones tal como se muestran en la Figura 2.6.

2.2.1. VARIABILIDAD

La cantidad de variaciones que se pueden establecer a partir de la expresión $A(y) = \frac{a}{2}y$ es llamada *variabilidad.* Expresaremos este concepto de la siguiente manera:

> *La variabilidad es el conjunto de todas las variaciones del movimiento de un fenómeno.*

[2-3]

Como puedes ver, la expresión $A(y) = \frac{a}{2}y$ indica con más claridad la dependencia entre las dos cantidades, toda vez que representa totalmente la variabilidad producida por el fenómeno; dicha expresión es llamada *función*. En el caso de la fórmu-

la $A = \frac{a}{2}y$, esta idealiza el caso particular de una de las variaciones producidas por el fenómeno, toda vez que permite considerar al movimiento en un estado fijo o de *constancia.*

Ecuación: $A = \frac{a}{2}y$

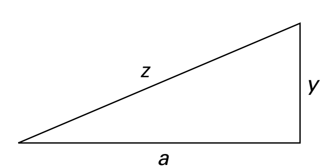


FIGURA 2.5. Variación o estado de constancia del movimiento.

Función: $A(y) = \frac{a}{2}y$

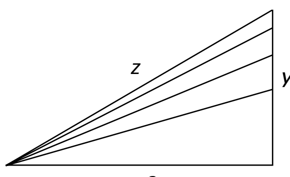


FIGURA 2.6. Diversas variaciones del movimiento.

2.2.2. LA FUNCIÓN COMO LA RELACIÓN DE DEPENDENCIA ENTRE CANTIDADES VARIABLES

La variación de las variables en los problemas físicos y geométricos ofrece dos opciones para dar definición al concepto de *función,* que serán fundamentales en este curso. La primera de estas es a través de la dependencia entre las propias cantidades y, la segunda, más precisa que la anterior, en un sentido conjuntista en tanto el recorrido de las variables en intervalos numéricos que son sujetas a las cantidades, tal como le veremos enseguida.

Definición de función como la relación de dependencia entre cantidades

En 1748 Euler escribió en latín un libro de cálculo titulado *Introductio in analyse infinitorum.* En el libro, Euler estableció una relación de dependencia entre cantidades variables en los siguientes términos: «se dice que una cantidad es función de otra cantidad». Actualmente, esto último se concibe en tanto la cantidad variable está en función de la otra cantidad. A partir de los ejemplos anteriores daremos enseguida una primera proposición para la definición del concepto de *función* en términos de la dependencia entre cantidades; esta es:

Dadas dos cantidades, decimos que la primera está en función de la segunda cuando cada valor de la segunda determina sólo un valor de la primera.

[2-4]

2.2.3. LA FUNCIÓN DESDE EL PUNTO DE VISTA DE LA TEORÍA DE CONJUNTOS (OPCIONAL)

Un significado del todo matemático del concepto de función, debe ser diferente del que hemos dado anteriormente a partir de dos cantidades en mutua dependencia.

En la matemática formal, como suele presentarse en tus cursos de *matemática discreta*, *matemáticas para computación*, la lógica, etc., se usa el término *función* para designar una correspondencia entre los elementos de dos conjuntos de valores numéricos (números reales) aún cuando puedan ser otro tipo de colecciones u objetos.

La *convención* necesaria para la definición de función en términos conjuntistas, surge de discriminar la noción de ecuación o relación (caso particular de las variaciones del fenómeno) y establecer a partir de ella el de función. Así, la siguiente fórmula en *estado de constancia*, tomada del ejemplo 1 del rubro anterior: $z = \sqrt{a^2 + y^2}$, establece una relación de dependencia entre la variable y y la variable z. No obstante, z puede tomar dos valores numéricos distintos, positivos y negativos, debido a la naturaleza del valor absoluto de la raíz. Si para efectos prácticos *conviniéramos* en hacer uso *solamente* de los valores positivos, o bien pudieran ser los negativos, estaríamos en el caso de considerar la raíz de $\sqrt{a^2 + y^2}$ como una función en el sentido de los conjuntos. Esta convención nos permitirá una definición más específica o precisa del concepto de función que pudiéramos enunciar como sigue:

La definición del concepto de función desde el punto de vista de la teoría de conjuntos

Si a cada elemento «x» *que pertenece al conjunto* X *se le asocia exactamente un elemento numérico* «y» *que pertenece al conjunto* Y (de aquí la convención) *entonces esta asociación constituye una función de* X *a* Y *en la que* f(x) (o sea la función) *es la regla que hace corresponder a cada elemento.*

[2-5]

2.2.4. DOMINIO Y RANGO DE UNA FUNCIÓN

La definición [2-5] deja ver tres expresiones técnicas importantes que simultáneamente aparecieron:

1. *función.*
2. x *pertenece a… y pertenece a.*
3. *Es la regla que hace corresponder.*

Desde este punto de vista, una función exige el conocimiento de tres cosas:

a) El conjunto numérico *X* llamado *dominio o campo de definición de la función.*
b) El conjunto numérico *Y* llamado *contradominio o campo de variación.*
c) La regla que hace corresponder a un conjunto con el otro.

En el caso de la fórmula: $z = \sqrt{a^2 + y^2}$ bastará con que discriminemos los valores negativos y escribamos la ecuación como una función, de la siguiente manera: $z(y) = \sqrt{a^2 + y^2}$.

Le daremos nombre también al conjunto de valores numéricos que toma cada variable. Así, el conjunto de valores posibles de la variable independiente es llamado *dominio de la función*, mientras que el conjunto de valores correspondientes a la variable dependiente se le llama el *contradominio o rango de la función*. El dominio de una función se puede pensar como el lugar donde *viven* los valores numéricos que dan sentido a la función en ese intervalo, razón por la cual autores de textos de cálculo la designan como *campo de existencia* de la función; nosotros usaremos ambas expresiones a lo largo del texto. En tanto que en el contradominio se mueven los valores de y a partir del movimiento de las x, este también es conocido como *campo de variación.*

Esta última convención que hemos empleado, nos llevó a establecer que toda función es una relación o fórmula, más, estarás de acuerdo en que no toda relación es una función.

EJEMPLO 1

Determinemos el dominio y contradominio o rango de la función $z(y) = \sqrt{a^2 + y^2}$.

SOLUCIÓN:

Como vimos en el capítulo anterior, la raíz está condicionada a que:

$$a^2 + y^2 \geq 0$$

Desigualdad de la que se desprende el dominio de la función, puesto que y es la variable independiente. De aquí que el dominio sean todos los números reales $\mathbb{R}$. ¿Por qué? Para este caso diremos que la *función*:

$$z(y) = \sqrt{a^2 + y^2}$$

Está definida para todos los números reales $\mathbb{R}$ que toma la variable independiente en su campo de existencia.

Para determinar el contradominio o rango, una opción es despejar la variable independiente y de la función, de modo que quede expresada en términos de la variable dependiente; es decir, como:

$$y = \sqrt{z^2 - a^2}$$

En esta nueva relación la condición para la raíz es que $z^2 - a^2 \geq 0$, o bien que $z \geq |a|$ (véanse las proposiciones [1-16] a [1-19]), desigualdad de la que se desprende el contradominio, debido a que z es la variable dependiente. Usando la propiedad adecuada para la desigualdad, concluimos que el contradominio o *campo de variación* es el intervalo $-a \geq z \geq a$, lo cual significa que z recorre estos intervalos numéricos, puesto que en él *vive*, tomando valores entre $(-\infty, -a)$ y (a, ∞).

2.2.4.1. Función acotada

No obstante que el resultado en el ejemplo 1 anterior para el contradominio está bien determinado, los valores numéricos que en la práctica puede tomar z, son solamente positivos, puesto que z en ese caso representa una distancia o magnitud real del triángulo. De esta restricción se desprende $z \geq a$, *convención* que llamaremos *rango* de la función.

Como vimos, la función anterior tiene por rango el conjunto de valores numéricos que van desde $z = 0$ hasta $z = \infty$, estos dos valores extremos del contradominio son importantes porque permiten establecer otra propiedad de las funciones, cuales son sus

cotas. Una cota es una altura o nivel establecido, en este caso, sobre el eje de las y. El nivel o cota menor que toma la función es $z = 0$, en tanto que no cuenta con cota mayor debido a que la función se pierde al infinito. Para este caso, se dice comúnmente que la función está acotada inferiormente para $z \geq 0$.

La verificación de las cotas de una función tomará relevancia cuando analicemos, más adelante, sus gráficas. No obstante, daremos una mejor definición de esta noción.

2.2.4.2. Imagen

Si tomamos algunos valores del dominio de la función anterior, por ejemplo los siguientes: $y = -a$, 0, a, 1, y les sustituimos en ella misma como: $z(\ ) = \sqrt{a^2 + (\ )^2}$, escribiremos los resultados de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
y &= -a, & z(-a) &= \sqrt{a^2 + (-a)^2} = \sqrt{2}\,a \\
y &= 0, & z(0) &= \sqrt{a^2 + (0)^2} = a \\
y &= a, & z(a) &= \sqrt{a^2 + (a)^2} = \sqrt{2}\,a \\
y &= 1, & z(1) &= \sqrt{a^2 + (1)^2} = \sqrt{a^2 + 1}
\end{aligned}$$

Diremos que $z(y)$, la cual se lee como *zeta de y*, es la *imagen de y* en la función, o en el caso particular $z(0) = a$ *z de cero* es la imagen de 0 en la función. Lo anterior también se puede interpretar como *el valor de z cuando y es igual a cero*.

2.2.5. REPRESENTACIÓN DE UNA FUNCIÓN COMO UNA TABLA DE VALORES

Otra manera de reconocer funciones es a través de una tabla de valores. En estos casos sucede que no es posible conocer la expresión analítica o fórmula que relaciona las cantidades en juego, o bien las variables dependiente e independiente. La Tabla 2.1 muestra el promedio de temperaturas sobre el nivel medio del mar, SNMM, determinadas por Humboldt[1] en su viaje por diversas regiones de México y América entre 1799 y 1803.

En la tabla se observan dos diferentes funciones indicadas a la vez por dos cantidades físicas: la primera es compuesta por la temperatura y las alturas SNMM, en este caso la variable independiente se coloca en la columna de las temperaturas T, en tanto que la variable dependiente es representada por la columna de las alturas SNMM h o bien $h(T)$. La otra es integrada por la columna de la presión barométrica p y la misma columna de las alturas SNMM $h(p)$ la primera hace las veces de variable independiente, en tanto que la segunda lo es de la variable dependiente. Como podrás observar en el ejemplo, en principio no es posible conocer las fórmulas $h(T)$ y $h(p)$ que relacionan estas columnas.

[1] A. L Humboldt y A. Bonpland: *Essai sur la géographie des plantes*. Chez Leurault, Shoell et Compagnie, Libraires. Paris XIII-1805, pág. 88.

Tabla 2.1. Construido a partir de la tabla 2.2 aparecida en los *Essai* de Humboldt.

Alturas h SNMM en metros	**Temperatura T promedio en grados centígrados**	**Presión P barométrica en cm**
0-500	+25,5	0,76202
500-1.000	24,0	0,71961
1.000-1.500	22,6	0,67923
1.500-2.000	21,2	0,64134
2.000-2.500	20,0	0,60501
2.500-3.000	18,7	0,57073
3.000-3.500	14,4	0,53689
3.500-4.000	9,0	0,50418
4.000-4.500	6,4	0,47417
4.500-5.000	3,7	0,44553
5.000-5.500	0,4	0,41823
5.500-6.000	−3,0	0,39206
6.000-6.500	−6,0	0,36747
6.500-7.000	−10,0	0,34357
7.000-7.500	−13,0	0,32035
7.500-8.000	−16,0	0,30068

Tabla 2.2. Original diseñada por Humboldt.

88 TABLEAU PHYSIQUE

Cette formule donne de 500 à 500 mètres les hauteurs barométriques suivantes :

ÉLÉVATIONS AU-DESSUS DU NIVEAU DE LA MER.		TEMPÉRATURE EN DEGRÉS DU THERMOMÈTRE	HAUTEURS BAROMÉTRIQUES.	
EN MÈTRES.	EN TOISES.	CENTIGRADE.	EN MÈTRES.	EN LIGNES DE PIED DE PARIS.
m 0	t 0	+ 25°3	m 0,76202	l 337,8
500	256	+ 24,0	0,71961	319,03
1000	513	+ 22,6	0,67923	301,18
1500	769	+ 21,2	0,64134	284,28
2000	1026	+ 20,0	0,60501	268,24
2500	1282	+ 18,7	0,57073	253,05
3000	1539	+ 14,4	0,53689	238,06
3500	1795	+ 9,0	0,50418	223,50
4000	2052	+ 6,4	0,47417	210,20
4500	2308	+ 3,7	0,44553	197,55
5000	2565	+ 0,4	0,41823	185,40
5500	2821	— 3,0	0,39206	173,84
6000	3078	(— 6,0)	0,36747	162,95
6500	3334	(— 10,0)	0,34357	152,38
7000	3591	(— 13,0)	0,32035	142,61
7500	3847	(— 16,0)	0,30068	133,36

2.2.6. VARIABLE DISCRETA Y VARIABLE CONTINUA

Las unidades de medición usadas a partir de los instrumentos por Humboldt, en el problema de la medición temperatura-presión, fueron grados centígrados y centímetros para las variables independientes, en tanto que para la variable dependiente se uso el metro.

El dominio o campo de existencia de las funciones, en ambos casos, se describe a través del conjunto de números que van del 0 al 8.000; aquí el dominio es una serie de intervalos de la forma $a \leq x \leq b$. El contradominio o campo de variación para la primera función es el conjunto de 16 números de la lista: +25,3, +25,4, +22,6, +21,2, +20,0, +18,7, +14,4, +9,0, +6,4, +3,7, +0,4, −3,0, −6,0, −10,0, −13,0, −16,0. En estos la variable recorre de manera aislada solamente promedios de temperaturas, de manera que la diferencia entre cada dos de ellas cambian a través de incrementos que van de 0,1 en 0,1, o de 0,1 en 0,3, o bien otros, en este sentido se dice que la *variable es discreta*. Ejemplos de variables discretas son el I. Q, o coeficiente intelectual de un grupo de estudiantes, el número de integrantes de una familia, la talla del pie, etc.

En el Capítulo 2 haremos uso de la tabla construida por Humboldt y tomaremos indistintamente las variables dependiente e independiente, según sea el caso que tratemos. Incluso veremos que en el campo de variación de la función dada por la tabla la variable es continua.

En el caso del campo de variación para la segunda función, el recorrido que hace la variable es más cercano entre cada uno de los valores numéricos asociados a la presión barométrica, no obstante quedan *huecos* entre ellos, lo cual indica que la variable es discreta. Si la variable en su recorrido tomara *todos* los valores reales, de modo que entre dos de ellos la diferencia pueda ser arbitrariamente tomada, afirmaríamos que esta sería una *variable continua*. Ejemplos de variables continuas lo son la medida del tiempo, de estatura y peso de una persona, la velocidad de un automóvil, etc.

Inferir significa anticipar, conjeturar o prever

De lo dicho anteriormente se desprende un aspecto fundamental para el aprendizaje del cálculo diferencial, el estudio de los fenómenos a partir de las tablas de valores permite hacer *inferencias* que dan para anticipar resultados sobre la base de los datos en juego. En el caso de las temperaturas SNMM arriba del intervalo 7.500-8.000, Humboldt *conjeturó* a partir de las regularidades que le otorgó la tabla, la temperatura de −16 °C para esas alturas, la conjetura se debió a que en América difícilmente se encuentran alturas superiores a los 5.000 metros SNMM, como el mismo sabio lo aceptó en el documento mencionado. Lo mismo hizo para predecir la presión barométrica para esas alturas, al hacer uso de la fórmula que se menciona en el siguiente parágrafo.

En el contexto del cálculo diferencial, R. Cantoral, investigador del Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav I.P.N, ha llamado al proceso de inferir, *ciencia de la predicción*, con la cual se busca *prever* el comportamiento futuro de los fenómenos que involucran movimiento, como por ejemplo el comportamiento que tendrá un puente antes de su construcción, la velocidad con la que se podrá operar en una autopista, la ruta óptima de vuelo de un avión comercial, etc. De la predicción sacaremos partido más adelante.

2.2.7. LA FUNCIÓN COMO UNA FÓRMULA

Para la determinación de la altura barométrica que da lugar a la presión atmosférica para cualquier lugar SNMM, Humboldt hizo uso de una fórmula que tiempo atrás había determinado P. S Laplace, publicándola en su obra llamada *Traité de la mécanique céleste* en 1799. La fórmula involucra las siguientes cantidades, H: altura del barómetro al nivel del mar, la cual es una constante; la temperatura T al nivel del mar, de la cual Humboldt usó el promedio que aparece en la tabla; la temperatura t del lugar que se desea determinar la presión barométrica, la cual resulta ser la única variable. Hizo uso además otras constantes como X tomándole como la altura del barómetro en el lugar de la experimentación. De esa manera, y entre otros valores constantes, la fórmula dada por Laplace y usada por Humboldt, fue la siguiente:

$$h(t) = \frac{H}{m\left(\dfrac{1 + T - t}{6.412}\right)}$$

En sí misma la expresión es muy simple y se puede considerar una función en la que t y h se encuentran en dependencia, puesto que el resto de los valores son constantes.

Otras funciones de uso cotidiano en la física, entre aquellas de tipo geométrico, y otras disciplinas son las siguientes:

a) La ecuación para la caída libre de un cuerpo propuesta por Galileo: $d(t) = \frac{1}{2}at^2$, a, es aceleración y t, tiempo.
b) La segunda ley de Newton: $F = ma$, m es masa y a la aceleración.
c) La velocidad de un cuerpo en movimiento circular uniforme: $v(f) = 2\pi Rf$, con f la frecuencia.
d) La función que relaciona grados Fahrenheit F con grados centígrados C: $C(F) = \frac{5}{9}(F - 32)$.
e) Velocidad de escape para poner en órbita un satélite: $v(t) = \sqrt{2gR}$, $g = \frac{\text{m}}{\text{seg}^2}$.

Indica para estas funciones las variables dependiente e independiente en cada caso, así como su dominio y contradominio.

2.2.8. LAS FUNCIONES COMO EXPRESIONES ANALÍTICAS

Una *expresión analítica* es una función expuesta en una fórmula como las anteriores, incluso le utilizamos en ese sentido anteriormente. El término expresión analítica fue considerado inicialmente por Euler en el libro de cálculo ya citado *Introductio in analyse infinitorum*. Otra definición que él dio del concepto de función en estos términos fue la siguiente: «La función de una cantidad variable es una expresión analítica compuesta de cualquier manera a partir de esa cantidad variable y de números o cantidades constantes». Esta definición para las funciones es más amplia que el solamente concebirlas como una simple fórmula. La idea de función analítica de Euler, era la de indicar una sola función a partir de varias fórmulas seccionadas en dos o más intervalos. El ejemplo siguiente nos ayudará a entender la extensión que haremos del concepto de *función analítica* construyéndolo a través de diferentes fórmulas.

2.2.8.1. Función definida parte por parte

EJEMPLO 1

La cantidad de energía eléctrica indicada en un medidor de una casa habitación era, al empezar el día, de 20 kW, y durante las siguientes 24 horas se ha gastado la siguiente cantidad de energía: desde las 5 hasta las 8 de la mañana, 60 W para cada una de los cinco focos, y desde las 17 a las 24, otros 60 W para cada uno de estos focos, y 100 W para el televisor. Indicando con y la cantidad de energía señalada por el medidor, y el tiempo por t, obtenemos cuatro funciones para cada intervalo de tiempo indicado; estas son:

- $y_1 = 20$, para $0 \leq t \leq 5$; 20 kW es la cantidad de energía durante las primeras 5 horas.
- $y_2 = 0{,}3(t - 5)$ para $5 \leq t \leq 8$; 5 focos de 60 W son 300 W o bien = 0,3 de kW, $(t - 5)$ es el tiempo transcurrido hasta ese momento.
- $y_3 = 20{,}9$, que resulta de la operación: $20 + 0{,}3(8 - 5) = 20{,}9$.
- $y_4 = 20{,}9 + 0{,}4(t - 17)$.

De manera que la función de dependencia entre estas variables es expresada como:

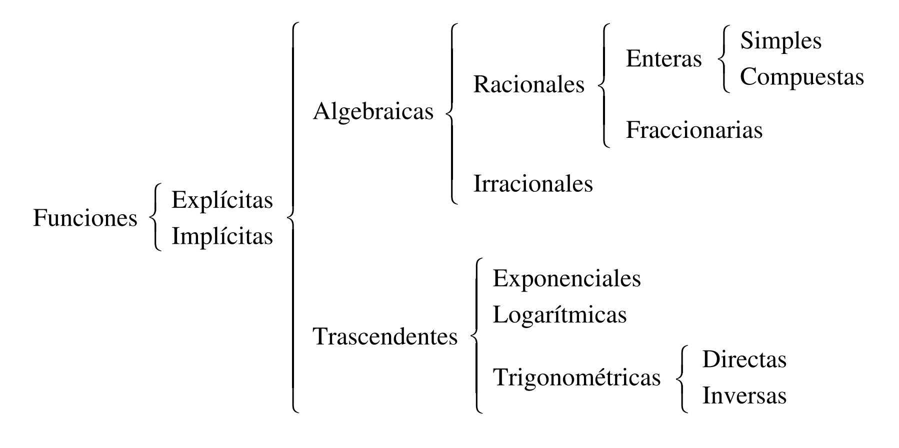
$$y = \begin{cases} 20 & \text{para } 0 \leq t \leq 5 \\ 20 + 0{,}3(t - 5) & \text{para } 5 \leq t \leq 8 \\ 20{,}9 & \text{para } 8 \leq t \leq 17 \\ 20{,}9 + 0{,}4(t - 17) & \text{para } 17 \leq t \leq 24 \end{cases}$$

Esta forma de construir funciones será determinante para entender los temas de *Transformada de Laplace* y *Series de Fourier*, que verás semestres más adelante.

2.3. CLASIFICACIÓN DE LAS FUNCIONES POR SU NATURALEZA: ALGEBRAICAS Y TRASCENDENTES

A principios del siglo XX, en 1912, apareció publicado en México el texto llamado *Curso abreviado de análisis*, escrito por el profesor de la Escuela Nacional Preparatoria A. Lamadrid[2]. En la parte que corresponde a las *funciones*, el autor dividió estas últimas a través de una clasificación muy cercana a como les concebimos actualmente. Nos serviremos de esa clasificación para ir explicando cada tipo, en tanto agregaremos algunos elementos que no se consignan es la siguiente:

TABLA 2.3. La tabla muestra una clasificación para las funciones más conocidas del cálculo.



2.3.1. FUNCIÓN EXPLÍCITA Y FUNCIÓN IMPLÍCITA

Las funciones, expresadas a través de fórmulas, son llamadas *explícitas* si la fórmula señala las operaciones que se efectúan a la variable independiente para llegar a determinar la variable dependiente. En caso contrario se llaman *implícitas*.

En las funciones vistas anteriormente, las expresiones aparecen resueltas respecto a una de la variables: $d = \frac{1}{2}at^2$, $v = 2\pi Rf$, $C = \frac{5}{9}(F - 32)$, $v = \sqrt{2gR}$, están colocadas en forma explícita. En tanto que el caso de una función implícita puede ser la relación que ya vimos: $a^2 + y^2 = z^2$, otro ejemplo sería: $ay^2 + by - cx^2 = 0$. Si se trata de una función explícita la notación usada para ellas es: $y = f(x)$, que se lee como *y está en función de x.* Bajo la forma implícita se representan como funciones en varias variables, en la forma: $f(x, y) = ay^2 + by - cx^2$.

[2] A. Lamadrid: *Curso abreviado de análisis*. Imprenta y Fototipia de la Secretaría de Fomento. México, 1912, pág. 94.

2.3.2. FUNCIONES ALGEBRAICAS

Son llamadas comúnmente funciones *algebraicas* aquellas en las que las variables se sujetan a las operaciones cotidianas de suma, resta, multiplicación, división, elevación a potencia de exponentes constantes y enteros, así como extracción de raíces constantes y enteras, o bien aquellas expresiones que son solución de una ecuación algebraica.

EJEMPLOS

$$y = a,\ y = a \pm x,\ \ y = ax,\ \ y = \frac{a}{x},\ \ y = ax^n,\ \ y = \sqrt[n]{x}$$

En las que a es un número real cualquiera y n un entero.

2.3.2.1. Función constante y función lineal

La expresión $y = a$, por ejemplo $y = 5$, es denominada *función constante*, en tanto que la función $y = a \pm x$ es llamada *función lineal* aún cuando es más común expresarla como $y = ax + b$, con a y b números reales. Si la función solamente se expresa como $y = x$, se la conoce como *función identidad*. Cada una de estas funciones se puede formular como una *función polinomial*. Por ejemplo, la función: $y = a + x$, al reescribirla como $y - x = a$, la hemos convertido en una *función polinomial en dos variables*.

2.3.2.2. Funciones racionales

Lo mismo podemos hacer con la *función racional* (entera simple) $y = \frac{a}{x}$ al escribirla como $xy - a = 0$. No obstante, una función racional se escribe como el cociente de dos funciones polinómicas en la forma $f(x) = \frac{h(x)}{p(x)}$, por ejemplo la función $y = \dfrac{3x - \frac{1}{2}}{8x^2 - \frac{1}{4}x + 1}$, es racional. Se exceptúan aquellas funciones que son expresadas con exponentes fraccionarios (incluso los casos de funciones trascendentes).

También racionales son las funciones polinómicas: $y = ax^n$, $y = 3 - 2x^7$ (entera compuesta) ¿por qué? la razón es sencilla, puesto que estas se pueden expresar como el cociente de dos funciones, colocando en el denominador la función constante $y = 1$, en la forma $f(x) = \frac{ax^n}{1} = ax^n$.

No obstante, el que una función racional se exprese como un cociente de dos funciones, es una de las propiedades más elementales de este tipo de funciones. Otras propiedades importantes, de estas últimas, serán vistas y utilizadas más adelante.

2.3.2.3. Función polinomial

Considerar las funciones algebraicas como polinomiales es importante debido a que de ellas se desprenden otras funciones muy útiles, como son la *función cuadrática* $y = x^2$, ($n = 2$ en la expresión $y = ax^n$) aunque en general se la conoce como $y = ax^2 + bx + c$, donde los coeficientes a, b, c son números reales. El caso de un polinomio de quinto grado, como por ejemplo $y = 3x^5 - 2x^4 + x^3 - 4x^2 + 10x - 31$ cae dentro de la nominación de funciones algebraicas debido ha que se opera con los casos de las operaciones aritméticas antes enunciadas. ¿Por qué razón la expresión: $f(x) = \dfrac{x^3 - 4x^2 + 1}{\sqrt{x^5 - 1}}$, es una función algebraica? ¿De qué manera la escribirías como una función polinomial? Construye con estas ideas algunas funciones algebraicas más.

De los casos anteriores se desprende la forma algebraica, en tanto definición de un polinomio de grado n como:

Definición de función polinomial

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \dots + a_1 x + a_0$$

En la que $y = f(x)$, $a_0, a_1, \dots, a_n$, *son números reales y, necesariamente,* $a_n \neq 0$, *con* n *entero positivo.*

[2-6]

Es este el caso particular de una función algebraica, racional y entera de grado n.

2.3.2.4. Funciones irracionales

Las funciones que contienen radicales como $y = \sqrt{x}$, $f(x) = x^{\frac{3}{2}}$, $3x^2 - 1 + \sqrt{x^5 - 1}$, son llamadas *funciones irracionales*. El caso de la expresión $y = \dfrac{\sqrt{x - 8}}{x^2 + 2x - 1}$ se puede de considerar una función irracional debido a que contiene en el numerador una expresión de ese tipo.

2.3.2.5. Funciones uniformes y relaciones multiformes

Si a cada valor de la variable independiente le corresponde un solo valor de la imagen $f(x)$, se dice que la función es *uniforme*. Si le corresponden dos o más valores no se trata de una función sino de una relación o fórmula llamada comúnmente multiforme.

EJEMPLO

¿A qué tipo de expresión corresponde la ecuación $y = 3x^3 - 5x + 2$?

SOLUCIÓN:

Es una expresión uniforme.

Una expresión es multiforme, como el caso de la relación $y = \text{arcsen}\, x$, debido a que para un solo valor de x la relación acepta diversos valores en la imagen. Así, cuando $x = \frac{1}{2}$, y toma los valores múltiplos de π como: $\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$, etc. No obstante, una relación multiforme, como la vista, puede ser restringida de su dominio para ser considerada una función uniforme. Para el ejemplo de $y = \text{arcsen}\, x$, dicha ecuación es considerada una función uniforme si se restringe su dominio entre los valores $\left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Otra función a la que restringimos su dominio fue aquella en la que determinamos valores positivos del dominio en $z(y) = \sqrt{a^2 + y^2}$. Anteriormente la expresión era multiforme en z.

2.3.3. FUNCIONES TRASCENDENTES

Las funciones elementales *trascendentes* son aquellas que no se pueden expresar en forma algebraica. Estas se componen de funciones exponenciales como: $y = a^x$, $y = e^x$; logarítmicas: $y = \log x$, $y = \ln x$; trigonométricas directas: $y = \text{sen}\, x$, $y = \text{tg}\, x$; trigonométricas inversas: $y = \text{arcsen}\, x$, $y = \text{arcsec}\, x$, entre otras que seguramente estudiaste en tus cursos de matemáticas en preparatoria, y cuyo estudio ampliaremos en los apartados correspondientes a la graficación de funciones.

EJEMPLOS

Son funciones trascendentes, las siguientes:

$$y = a^x,\ \ y = e^x,\ \ y = \ln x,\ \ y = \text{sen}\, x, y = \text{tg}\, x,\ \ y = \text{arcsen}\, x,\ \ y = \sec x$$

En las que a es un número real cualquiera y e el conocido irracional $e = 2{,}718\ldots$

Otro tipo de funciones trascendentes son las funciones escalonadas o definidas parte por parte.

El ejemplo que construimos anteriormente para distinguir el gasto de energía eléctrica en una casa habitación, cae en esta denominación:

$$y = \begin{cases} 20 & \text{para } 0 \leq t \leq 5 \\ 20 + 0{,}3(t - 5) & \text{para } 5 \leq t \leq 8 \\ 20{,}9 & \text{para } 8 \leq t \leq 17 \\ 20{,}9 + 0{,}4(t - 17) & \text{para } 17 \leq t \leq 24 \end{cases}$$

2.3.3.1. La función valor absoluto

Podemos construir la función valor absoluto a partir de la definición que dimos de este concepto anteriormente de la siguiente manera: $f(x) = |x|$, donde, como ya vimos $|x| = \begin{cases} x, & \text{si } x \geq 0 \\ -x, & \text{si } x < 0 \end{cases}$. Luego tendremos que: $f(x) = \begin{cases} x, & \text{si } x \geq 0 \\ -x, & \text{si } x < 0 \end{cases}$. Cuyo dominio son todos lo números reales $\mathbb{R}$ y contradominio todos los números reales positivos. Analizaremos con más detalle esta función en la sección 2.3.4.

2.3.3.2. Las funciones como leyes de acción y reacción

Cerraremos esta sección aclarando que una función de uso en la matemática es una ley que regula la correspondencia entre dos cantidades variables. En una función de la forma $y = f(x)$ no se concibe la posibilidad de una relación *causa* y *efecto* entre las cantidades involucradas. La *ley de acción y reacción* de Newton, afirma que:

> *Si un cuerpo* A *ejerce acción sobre otro cuerpo* B*, este realiza sobre* A *otra acción igual y de sentido contrario.*

La razón de que las funciones no se conciban bajo esa perspectiva es muy sencilla, y tiene que ver, por un lado, con la cantidad de variables que efectivamente son contenidas en un fenómeno físico, las cuales ejercen el efecto que se produce en la variable dependiente y, por otro, existen fenómenos en los cuales la dependencia entre cantidades se invierte, intercambiándose una variable por la otra, de manera que la causa en una se convierte en efecto y viceversa. La conocida ley de Boyle-Mariotte $pv = c$, afirma que el producto de la presión p por el volumen v de un recipiente es igual a una constante. Sin embargo, podemos determinar dos funciones distintas de esa relación $p = \frac{c}{v}$ y $v = \frac{c}{p}$, lo cual deja ver que la presión, por ejemplo, no es necesariamente la causa de la variación del volumen, o al contrario. Esto último fue considerado por el ingeniero mexicano G. Terrazas en su libro de texto llamado *Matemáticas Superiores* [1].

Las funciones del cálculo forman parte de procesos de causa y efecto que tienen que ver con *sistemas organizados* cuya característica principal es el crecimiento. De estos sistemas hablaremos en este mismo capítulo.

Alrededor de 1870, el filósofo mexicano Gabino Barreda hizo uso de la distinción de las funciones como cantidades cuya relación contiene la característica de causa y efecto, la variación entre cantidades de esa naturaleza fue llamada *variaciones concomitantes*. Con la idea de concomitancia, Barreda pudo dar una definición del concepto de límite infinito. Esto último se plantea al inicio del Capítulo 3.

En el sentido en que empleamos la definición de función, la concepción de esta da un carácter más general a las ecuaciones comunes. Las ecuaciones son consideradas

[1] G. Terrazas (1984): *Matemáticas Superiores*. Impreso en los Talleres Gráficos de la Dirección de Publicaciones del IPN México, tomo I, pág. 4.

en el álgebra como soluciones de problemas; en tanto que las funciones expresan leyes que generalizan cualquier expresión algebraica. El área formada por los triángulos con el movimiento del cohete, en el ejemplo visto en la sección 2.1, así lo evidencia. El área de todos los triángulos está dado por la función: $A(y) = \frac{a}{2}y$, en tanto que el área para una de las instantáneas o variaciones lo da la ecuación $A = \frac{a}{2}y$.

ACTIVIDADES Y EJERCICIOS DE LAS SECCIONES 2.1 A 2.3.3

I. Revisión de conceptos

1. Describe gráficamente la variación de los siguientes problemas que involucran movimiento. En cada caso declara por lo menos una de las variables y trata de distinguir las otras con las que esta se encuentra en dependencia, así como las constantes involucradas, para lo cual será necesario que les coloques las literales x, y, z o bien a, b, c respectivamente.

(Nota, no se trata de encontrar la función que corresponde a cada problema, sino más bien bosquejar una gráfica de ellos en la que sea posible identificar las variables y constantes).

a) Un punto en movimiento describe una línea recta.
b) Una línea recta en movimiento describe una superficie plana.
c) En un círculo el radio es variable, es decir el radio aumenta y disminuye ¿Qué otras cantidades cambian?
d) Una escalera de 4 m, resbala por una pared vertical.
e) Un avión vuela horizontalmente tomando contacto en tierra con una torre de control en diversos momentos de tiempo antes de pasar por encima de ésta, la cual se encuentra verticalmente a 10.000 metros del avión.
f) Con un pedazo de cartón cuadrado de 900 cm^2 se desea construir una caja abierta, cortando pequeños trozos cuadrados en las esquinas, cuya longitud x es variable.
g) Un globo esférico se infla con aire a velocidad constante.
h) Una persona se aleja de la luz de un poste, conforme lo hace su sombra va cambiando constantemente.
i) Se bombea agua en un depósito cónico de modo que va cambiando su volumen.
j) Dos barcos salen del mismo muelle al mismo tiempo, uno parte hacia el norte a cierta velocidad y el otro hacia el este a diferente velocidad que el otro.
k) En un pedazo rectangular de papel fotográfico se desea imprimir una foto de manera que se dejen márgenes variables por los cuatro lados de la misma.
l) La superficie de un sector circular cambia.
m) En el diseño de una curva circular, en un proyecto de carretera, cambia el radio constantemente.
n) Los lados de un rectángulo se mueven continuamente.
ñ) En un círculo hay inscrito un rectángulo que cambia constantemente de área.

o) Ocurre lo mismo que en el problema anterior, solamente que el cuadrado es inscrito en una elipse. (Salvo que se afirme lo contrario, los vértices del cuadrado inscrito tocan la elipse).
p) En una elipse un triángulo inscrito en ella cambia constantemente de área. Uno de los lados del triángulo es paralelo al eje mayor.
q) En una esfera de volumen fijo, un cilindro es inscrito cambiando constantemente sus dimensiones.
r) En un triángulo rectángulo cambia constantemente uno de los ángulos.
s) Por una curva cualquiera se mueven dos puntos en sentidos encontrados. Traza diversas posiciones de estos y dibuja las rectas que forman. ¿Cuál es la recta final cuando se juntan?

II. Actividades y ejercicios

2. Para cada una de las siguientes funciones determina la operación, en este caso se le llama evaluación, que se pide:

a) Si $f(x) = 4x - 3; f(-4), f(-2), f(0), f\left(\frac{1}{2}\right), f(2)$
b) $f(x) = x^2 - 10x + 2; f(-2), f(0), f(1), f(a), f(x + h), f(x - 1)$
c) $g(x) = \sqrt{x^2 - 25}$; $g(-5)$, $g(5)$, $g(0)$, $g(a)$, $g(x - 5)$
d) $s(x) = \dfrac{4x^3 - 5x + 2}{x - 3}$; $s\left(\frac{1}{2}\right)$, $s\left(\frac{-4}{3}\right)$, $s(-3)$, $s(3)$
e) $m(x) = x + \dfrac{1}{x}$; $m(x + 1)$ y $m(x) + 1$
f) $p(x) = \dfrac{x - 2}{2x^2 + x}$; $p(2)$, $p\left(\frac{1}{2}\right)$, $p(0)$
g) $t(x) = \dfrac{1}{x}$; $t(x + h) - t(x)$

3. Dadas las tablas 2.3, 2.4 y 2.5, de los problemas 8 y 9, indica en cada caso las columnas que representan las variable independiente y dependiente, el tipo de variable (continua o discontinua) así como los dominios o campos de existencia y contradominios o campos de variación correspondientes:

a) Para diferentes valores de tiempo se determinaron las distancias verticales de un objeto que fue lanzado hacia arriba. Los valores se proporcionan en la Tabla 2.3.
b) Para determinar el área del orificio de un recipiente por el que fluye agua, el científico francés M. Prony* propuso ha finales del siglo XVIII la siguiente fórmula:

$$A = \frac{2}{3}\,\frac{k}{a}\left[\left(1 + \frac{a}{2k}\right)^{\frac{1}{2}} - \left(1 - \frac{a}{2k}\right)^{\frac{1}{2}}\right]$$

* En la época de Prony no existían, obviamente, calculadoras, por tanto los logaritmos ayudaban para resolver las operaciones elementales que surgían en los problemas.

TABLA 2.3. En la tabla 2.3, ¿cuál es la variable independiente y cuál la variable dependiente?

Distancia en metros	**Tiempo en seg.**
0	0
5,0	2,5
10,0	5,5
15,0	11,0
20,0	16,0
25,0	22,0
30,0	26,5
35,0	32,0
40,0	39,5

Prony experimentó para diferentes valores del factor $\frac{a}{2k}$, determinando con ello diferentes valores del área A, y el logaritmo correspondiente log A, como se plantean en la Tabla 2.4.

TABLA 2.4. En la tabla 2.4, ¿quién hace las veces de variable independiente y quién de variable dependiente?

Valores de $\frac{a}{2k}$	**Valores del área A del orificio**	**Valores del log A**
0,0	1,00000	0,00000
0,1	0,99958	–1,99982
0,2	0,99832	–1,99927
0,3	0,99619	–1,99834
0,4	0,99312	–1,99700
0,5	0,98904	–1,99521
0,6	0,98383	–1,99292
0,7	0,97724	–1,99000
0,8	0,96896	–1,98621
0,9	0,95828	–1,98149
1,0	0,94281	–1,97442

c) Desarrolla la siguiente actividad, con la cual será posible que vayas llenando la tabla que abajo se consigna: En un depósito de plástico de desecho, de dos o más litros de capacidad, haz una serie de marcas que correspondan a capacidades de un cuarto de litro, medio litro, un litro, etc., hasta llegar a la capacidad límite; puedes usar una regla graduada para aproximar esos valores. Después, coloca el depósito en el chorro del agua del flujo de la cocina y, haciendo uso de un reloj o cronómetro, ve anotando los tiempos correspondientes en segundos en la Tabla 2.5 conforme el agua vaya alcanzando los niveles que marcaste; cuando llegue al nivel de 2,0 litros cierra el chorro del agua (las capacidades que habrás anotado son llamadas en hidráulica el Gasto, en este caso el gasto se mide en litros por segundo).

TABLA 2.5. Haz el experimento de llenar el depósito de agua y ve colocando los valores del tiempo t en la tabla.

Capacidad en litros ***Gasto***	**Tiempo en seg.**
0,25	
0,5	
0,75	
1,0	
1,25	
1,5	
1,75	
2,0	
…	
…	
3,0	
3,5	
4,0	

A partir de los datos de la Tabla 2.5, intenta predecir el tiempo que tardará el flujo de agua para llegar a los niveles de 3 litros, 3,5 litros, 4 litros…, y 10 litros.

4. Determina el campo de existencia para cada una de las siguientes funciones.

a) $n(x) = -3x + 2$

b) $f(x) = \sqrt{16 - x^2}$

c) $r(x) = x^2 - 5x + 6$

d) $p(x) = \sqrt{x^2 - 5x + 6}$

e) $t(x) = \dfrac{5x + 1}{\sqrt{x^2 - 5x + 6}}$

f) $q(x) = \dfrac{4x - 3}{5 - 2x}$

g) En la expresión: $f(x) = x^3 + 8x^2 + 2x - 1$. ¿Qué representa la letra f?

5. Expresa en forma implícita las siguientes funciones, a y r son constantes:

a) $y = \sqrt{r^2 - x^2}$

b) $y = \dfrac{a}{x^3}$

c) $y = \dfrac{2x - 1}{x + 2}$

d) $y = \dfrac{1}{\sqrt{a^2 + x^2}}$

e) $y = \dfrac{ax}{\sqrt{a^2 - x^2}}$

6. Expresa en forma explícita las siguientes relaciones:

a) $xy = a$

b) $ax^{\frac{1}{3}} + by^{\frac{1}{3}} = 1$

c) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

d) $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

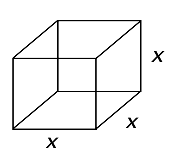
e) $x^2 + y^2 = r^2$

f) $y = \text{sen}\, xy$

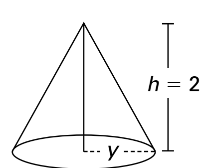
g) $y = a\, \text{sen}\, x + yx$

7. Expresa una función que relacione el área o volumen que se pide con la variable independiente que se da para cada una de las siguientes figuras geométricas:

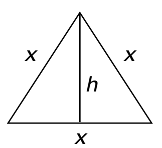
a) El volumen del cubo de lado x.



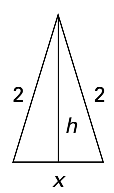
b) El volumen del cono que se indica.



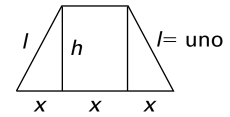
c) El área del triángulo equilátero que se indica.



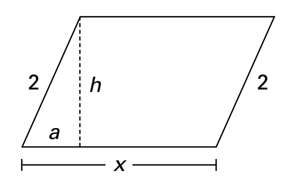
d) El área del triángulo isósceles que se indica.



e) El área del trapecio que se indica.



f) El área del paralelogramo que se indica.



g) A partir de la ecuación $x^2 - axy + y^2 = 0$, expresa x en función de y, así como y en función de x. Usa la fórmula general $y = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

h) Si $f(x) = 4x^5 - 6x^3 + 2x - 1$, determina el resultado de la operación: $(f(1) - 3f(-1))f(0)$.

8. De acuerdo a la tabla diseñada por A. Lamadrid para clasificar los diferentes tipos de funciones, clasifica cada una de las siguientes.

a) $y = 5x^4 - 2x^2 + 1$

b) $y = \sqrt{3x^2 - 1}$

c) $y = \operatorname{arccot} x$

d) $x^2 - 5xy + y^2 = 1$

e) $y = \dfrac{5x^2 - 2x + \dfrac{1}{3}}{2x + 3}$

f) $y = \dfrac{\sqrt{x - 3}}{2x + 5}$

g) $y = \begin{cases} x - 2, & \text{si } x < 0 \\ 5 - x, & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

2.3.4. GRÁFICAS DE FUNCIONES Y SUS PROPIEDADES

En este apartado haremos uso de tres ideas centrales en la construcción de funciones; por un lado, *la función identidad* como generadora de un sinnúmero de funciones algebraicas, por otro, la función seno será vista como eje central en la construcción de funciones trigonométricas y, finalmente, la función exponencial en el contexto de construir funciones exponenciales y logarítmicas. En lo que sigue, pondremos énfasis en las operaciones gráficas de *reflexión traslación, contracción* e *inversión* que son cotidianas en la construcción de funciones de los cursos de matemáticas en el nivel de ingeniería, debido a que estos efectos sugieren las nociones de variabilidad que estudiaremos en los capítulos posteriores. Para ello será necesario introducir algunas propiedades importantes de las funciones, como son las de *función par* y *función impar, uno a uno, función inversa, periodicidad* y las nociones de *máximo* y *mínimo*, entre otras, lo cual nos permitirá un conocimiento más amplio de las funciones construidas.

Para iniciar, tracemos sobre un plano X, Y una curva $y = f(x)$ cualquiera, de manera que en ella identifiquemos un punto P (como se ve en las Figuras 2.8, 2.9 y 2-10). Dibujemos enseguida las respectivas abscisa x, sobre el eje de las x levantando sobre ella y el punto P una paralela al eje y, y su ordenada y sobre el eje de las y trazando a partir de esta y el punto P una paralela al eje x.

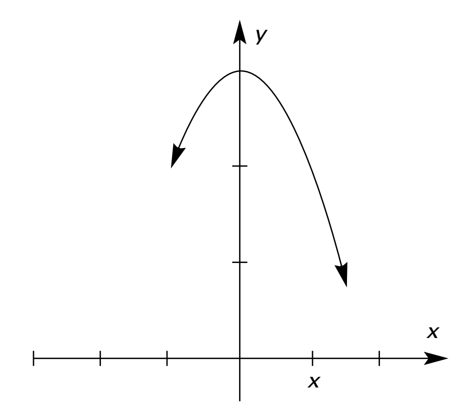


FIGURA 2.8. Gráfica de $y = f(x)$.

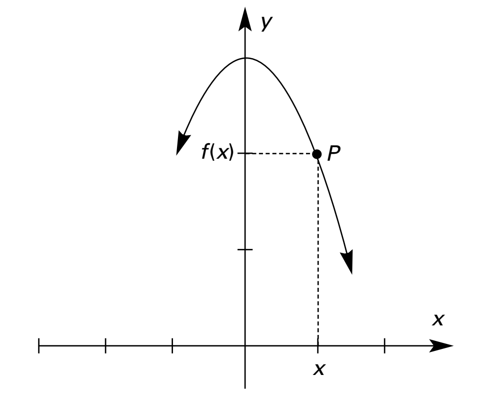


FIGURA 2.9. Punto P sobre la gráfica.

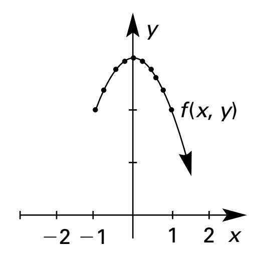


FIGURA 2.10. Variación en la curva a partir de una sucesión de puntos.

Al hacer estas operaciones, hemos puesto en correspondencia al valor de la abscisa x con respecto al valor de la ordenada $y = f(x)$, que es el valor que toma la función.

El lugar que ocupan en el plano X, Y los puntos de la forma $P(x, f(x))$ es llamado *gráfica* de la función.

2.3.4.1. ¿Cómo se construye la gráfica de una función?

La correspondencia deja ver en la parte geométrica la relación entre la variable independiente y la variable dependiente. No obstante, la parte más importante a considerar en la construcción de la gráfica de una función $f(x)$ es su variación. A la vez que se construye la gráfica, es necesario conocer los aspectos algebraicos de las fórmulas involucradas para reparar en las particularidades de la manera en que la variación ocurre.

Para el caso del ejemplo, la variación de la variable x se presenta en el recorrido que esta hace en el dominio de la función $y = f(x)$. De este modo, se dice que el campo de existencia de la función es el conjunto de abscisas de todos los puntos comprendidos en la curva.

La primera opción que se tiene para *construir* la gráfica de una función es a través de dar valores numéricos a la variable x, con lo cual es posible determinar los correspondientes valores de y, y con ello trazar los puntos que corresponden a la gráfica

TABLA 2.6. Tabla de valores para la función $y = x^3$.

Punto	x	$y = x^3$
	$-\infty \ldots$	$-\infty \ldots$
P_1	-2	-8
P_2	$\frac{-3}{2}$	$\frac{-27}{8}$
P_3	-1	-1
P_4	$\frac{-1}{2}$	$\frac{-1}{8}$
P_5	0	0
P_6	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$
P_7	1	1
P_8	$\frac{3}{2}$	$\frac{27}{8}$
P_9	2	8
	$\ldots \infty$	$\ldots \infty$

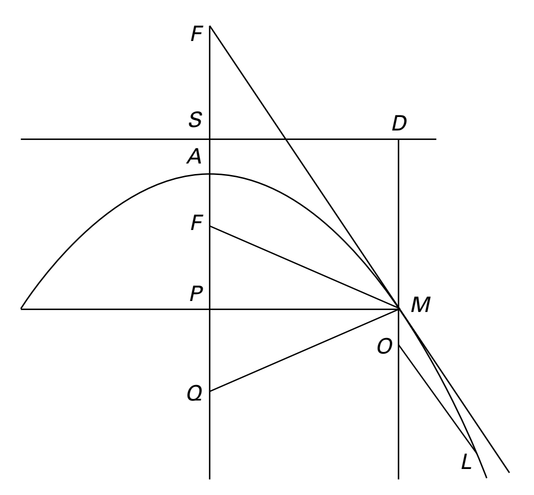


FIGURA 2.11. Gráfica de una parábola diseñada por B. Bails en el libro de texto de cálculo titulado *Principios Matemáticos,* Imprenta de la Viuda de Ibarra. Madrid, MDCCLXXXIX. Los «Principios» de Bails fueron utilizados en la enseñanza de la matemática del Colegio de Minería mexicano a partir de 1796.

buscada. Intentemos de esta manera graficar la función $y = x^3$. Esta tiene por dominio todos los números reales desde $-\infty$ hasta ∞. Es claro que no se pueden concebir todos los valores numéricos para el diseño de la gráfica en el intervalo $-\infty \leq x \leq \infty$. Luego, asignemos solamente algunos valores de x tomados del dominio, y determinemos por medio de la fórmula $y = x^3$ los valores correspondientes de $y = f(x)$ consignándolos en la tabla 2.6.

2.3.4.2. Suavidad de la curvatura

Intersecamos en el plano los valores de x e y para cada uno de los puntos P_1, P_2, P_3, …, P_8 según los datos de la tabla, y trazamos, apoyándonos en ellos, una curva suave que tiene una *torcedura* en el origen. La gráfica que corresponde a los valores asignados es una curva continua como la que se muestra en la Figura 2.12.

Si la gráfica no se traza suavemente siguiendo la *curvatura* que los propios puntos sugieren, los resultados pueden no corresponder a la misma. Es común, cuando alguien se inicia en la graficación, que entre los puntos se tracen segmentos de recta que asemejan la curva, sin que correspondan a la misma. Un ejemplo de esto último aparece a la gráfica de la Figura 2.13. Lo único que esta última gráfica refleja es la necesidad de involucrar más valores para x, del dominio, intermedios entre los usados anteriormente. Es obvio que cuantos más valores se utilicen, la gráfica tendrá la *suavidad* de la curvatura que le corresponde.

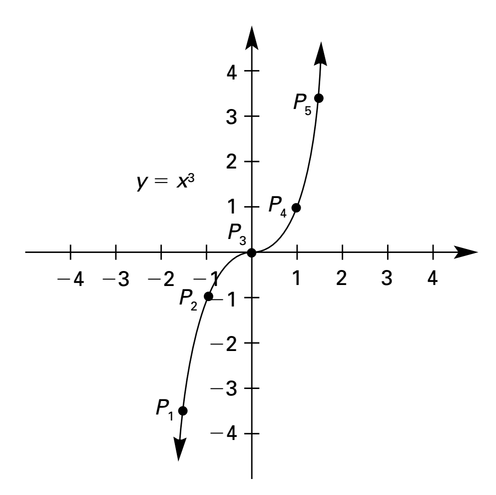


FIGURA 2.12. Gráfica estándar de $y = x^3$.

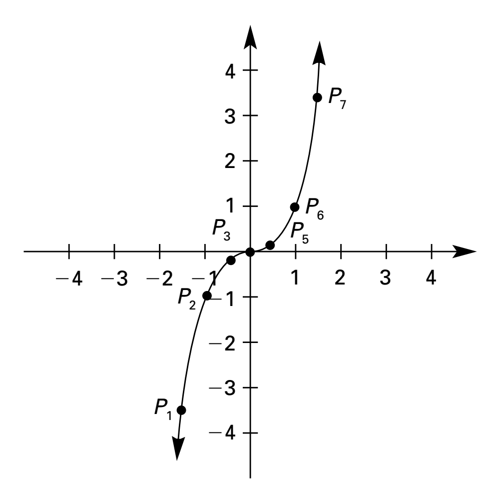


FIGURA 2.13. Gráfica aproximada con segmentos de $y = x^3$.

2.3.4.3. ¿Cómo se mide la suavidad de una curva?

En la siguiente gráfica de la Figura 2.14 colocamos los puntos P_1, P_2, P_3, …, etc., intermedios a los usados en la gráfica anterior (como se muestran en la Tabla 2.7, los hemos dejado en valores decimales). Observa que los tramos de recta entre cada dos puntos tienden a ser más suaves y, en consecuencia, la gráfica se parece más a la inicial. ¿Cuántos puntos habrá que tomar para que la curva adquiera la suavidad de la curva inicial, es decir, para que entre cada dos puntos no exista una línea recta?

Para que la curva tome la suavidad deseada, sería necesario involucrar todos los valores del dominio, lo cual es prácticamente imposible. No obstante, a pesar de que lo pudiéramos hacer, difícilmente tendríamos la suavidad deseada, debido a que la curva siempre va a figurar a través de tramos de líneas rectas.

TABLA 2.7

x	*y*
–2	–8
–1,75	–5,35
–1,5	–3,3
–1,25	–1,95
–1	–1
–0,75	–0,42
–0,5	–0,12
–0,25	–0,01
0	0
0,25	0,01
0,5	0,12
0,75	0,42
1	1
1,25	1,95
1,5	3,3
1,75	5,35
2	8

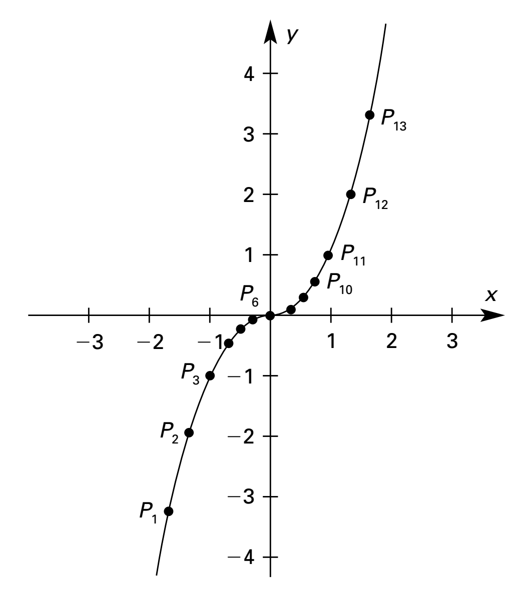


FIGURA 2.14. Aproximación mejorada con segmentos de $y = x^3$.

Una manera de medir la suavidad de la curva es a través de las pendientes de las rectas trazadas. Enseguida colocamos las tablas de las gráficas anteriores con las correspondientes pendientes de cada recta entre los puntos P_1P_2, P_2P_3, P_3P_4, …, etc. La pendiente es fácil de determinar haciendo uso de la conocida fórmula:

> *Ecuación para determinar la pendiente de una recta conocidos dos puntos de esta*: $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

[2-7]

Por ejemplo, la pendiente entre los puntos P_1P_2 de la primera tabla es:

$$m_1 = \frac{-3{,}375 - (-8)}{-1{,}5 - (-2)} = \frac{4{,}625}{0{,}5} = 9{,}25$$

Y la segunda:

$$m_2 = \frac{-1 - (-3{,}375)}{-1 - (-1{,}5)} = \frac{2{,}375}{0{,}5} = 4{,}75, \text{ etc.}$$

La suavidad de la curva es fácilmente verificable si se tienen las pendientes de cada recta; bastará con que hagamos la diferencia entre cada dos valores de las pendientes en cada tabla y veamos la razón en que esas diferencias crecen o decrecen; por ejemplo, la diferencia entre las pendientes m_1 y m_2 de la Tabla 2.8 es de 4,5, en tanto que la diferencia para las dos pendientes de la Tabla 2.9 lo es de 2,4. La diferencia de las siguientes dos pendientes m_2 y m_3 de la primera tabla es de 3, mientras que la diferencia para las pendientes que siguen en la tabla contigua es de 2,8. En el primer caso la razón de crecimiento de la diferencia de las pendientes es 1,5, en tanto que la razón de crecimiento de la diferencia de las pendientes de la Tabla 2.9 oscila para valores más pequeños de entre 0,4 y 0,12. Diremos que la razón de crecimiento de las diferencias de las pendientes de la Tabla 2.8 es muy *grosera* en tanto que la razón de crecimiento de las diferencias de las pendientes de la Tabla 2.9 es *pequeña*, lo cual hace que la curva trazada con estos valores sea más suave.

De lo anterior, resulta importante convenir que la suavidad de la curva es implícita en su naturaleza, y ella es alcanzable solamente a través de tomar una cantidad suficiente de valores del dominio que nos orienten en la propia suavidad de la curva por trazar.

Tabla 2.8. La aproximación limitada de $y = x^3$ se muestra por la diferencia entre las pendientes de cada dos segmentos consecutivos.

x	y	**Recta**	m	$m_1 - m_2$
−2	−8	P_1P_2	9,25	
−1,5	−3,37	P_2P_3	4,75	4,5
−1	−1	P_3P_4	1,75	3
−0,5	−0,125	P_4P_5	0,25	1,5
0	0	P_5P_6	0,25	0
0,5	0,125	P_6P_7	1,75	1,5
1	1	P_7P_8	4,75	3
1,5	3,375	P_8P_9	9,25	4,5
2	8			

Tabla 2.9. Aproximación mejorada para $y = x^3$. Las diferencias consecutivas de las pendientes entre cada dos segmentos de recta muestran más *suavidad* para la curva.

x	y	**Recta**	m	$m_1 - m_2$
−2	−8	P_1P_2	10,6	
−1,75	−5,35	P_2P_3	8,2	2,4
−1,5	−3,3	P_3P_4	5,4	2,8
−1,25	−1,95	P_4P_5	3,8	1,6
−1	−1	P_5P_6	2,32	1,48
−0,75	−0,42	P_6P_7	1,2	1,12
−0,5	−0,12	P_7P_8	0,44	0,76
−0,25	−0,01	P_8P_9	0,04	0,40
0	0	P_9P_{10}	0,04	0
0,25	0,01	$P_{10}P_{11}$	0,44	0,40
0,5	0,12	$P_{11}P_{12}$	1,2	0,76
0,75	0,42	$P_{12}P_{13}$	2,32	1,12
1	1	$P_{13}P_{14}$	3,8	1,48
1,25	1,95	$P_{14}P_{15}$	5,4	1,6
1,5	3,3	$P_{15}P_{16}$	8,2	2,8
1,75	5,35	$P_{16}P_{17}$	10,6	2,4
2	8			

Otro aspecto que se puede rescatar del ejercicio, es que al convenir en tomar los valores de los puntos graficados P_1, P_2, P_3, …, etc., de izquierda a derecha, observamos que la curva $y = x^3$ *crece* en ese orden, es decir, de $-\infty$ a ∞, tomando como referencia el eje de las x, obsérvese que, en ese sentido, la curva no decrece.

Para cerrar este apartado, diremos que las gráficas no son en sí mismas funciones, ellas son herramientas de uso que ayudan en la representación de los problemas que resuelve el cálculo, y que asocian las dos características importantes en que una función es enunciada, es decir, las fórmulas y las tablas, a través de sus campos de definición y variación.

2.3.4.4. La gráfica de la función identidad

Enseguida construiremos funciones algebraicas a partir de un método distinto, las gráficas de algunas de las de más utilidad, como son $y = x$, $y = x^2$, $y = \sqrt{x}$. Llamaremos a éstas funciones, indistintamente, *formas canónicas*, o estándar, de las cuales desprenderemos más adelante otras combinaciones gráficas.

La primera es la llamada *función identidad* o *recta a 45°* (léase *recta a cuarenta y cinco grados*, o simplemente *recta a cuarenta y cinco*).

Su gráfica surge al trazar una *bisectriz* que corta en dos partes iguales al plano XY, y cuyos ángulos con respecto a los ejes se colocan a 45°; por ello, los valores que toman las abscisas y ordenadas son idénticos, razón por la cual toma esa denominación. Véase la Figura 2.15.

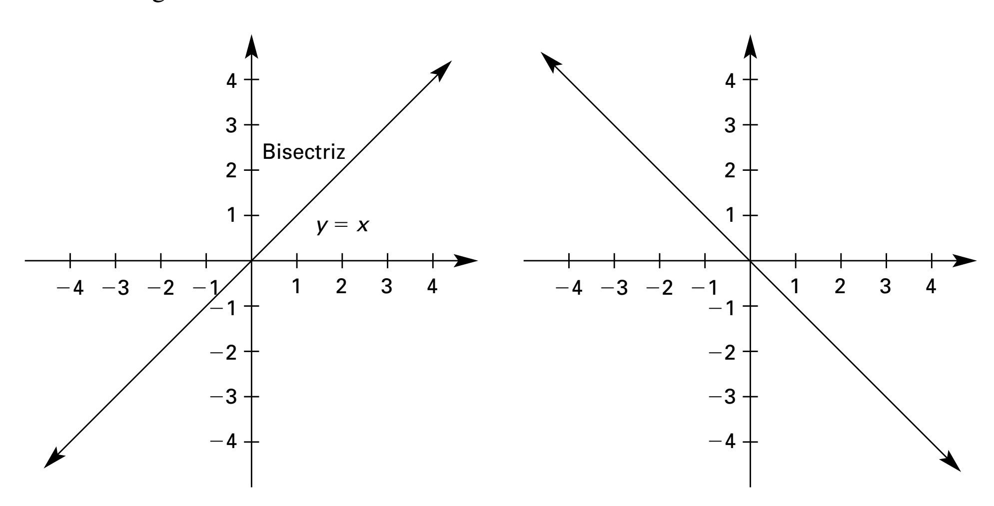


FIGURA 2.15. Recta a 45° o $y = x$.

FIGURA 2.16. Recta a 135° o $y = -x$.

Algebraicamente esto último se escribe como una igualdad entre abscisas y ordenadas como: $y = x$, fórmula que se desprende de la ecuación general de una recta en la que a = 1 y b = 0. Algo semejante ocurre a la recta $y = -x$.

2.3.4.5. Construcción de la gráfica de la función cuadrática a través de la recta a 45°

La recta a 45° tiene además la característica de que a partir de ella es posible *construir* otras funciones. Si nos fijamos bien, la función $y = x^2$ se puede reescribir como el producto de dos rectas a 45°, o sea, $y = x \cdot x$. Esta posibilidad nos indica que gráficamente la ecuación $y = x^2$ es el resultado de multiplicar por sí mismas las ordenadas de la recta a 45°. Al *multiplicar* de esa manera las ordenadas, estaremos *construyendo* la gráfica de la función cuadrática en su forma canónica. Para ello, marquemos algunas de las ordenadas de la recta a 45°, tal y como se ve en las gráficas de las Figuras 2.17 y 2.18, sin considerar la totalidad de los valores del dominio.

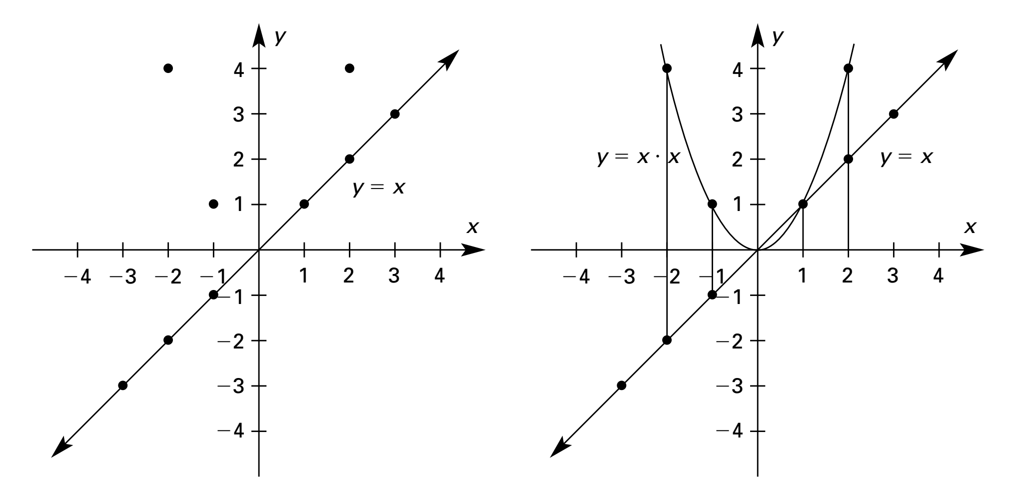


FIGURA 2.17. Operación gráfica $x \cdot x$.

FIGURA 2.18. Los puntos que resultan corresponden a $y = x^2$.

Los valores de esas ordenadas son, respectivamente: −3, −2, −1, 0, 1, 2 y 3. Al multiplicarlos por sí mismos, como: $(-3)(-3) = 9$, $(-2)(-2) = 4$, $(-1)(-1) = 1$, $(0)(0) = 0$, $(1)(1) = 1$, $(2)(2) = 4$, $(3)(3) = 9$ estaremos determinando los valores de las ordenadas para la función $y = x^2$.

Hemos colocado los puntos que corresponden a esas ordenadas en la gráfica de la Figura 2.17. Al igual que en el método de dar valores a la variable para determinar el que corresponde a las ordenadas, es necesario suavizar la curva a partir de tomar suficientes valores. En la Figura 2.18 aparece la gráfica, si eliminamos los elementos de apoyo para su construcción, la gráfica final que resulta es la que se muestra en la Figura 2.19, que corresponde a la función cuadrática $y = x^2$.

Esta última es una parábola cuyas ramas abren hacia arriba y su vértice se encuentra en el origen. Podemos decir que decrece de $-\infty$ a cero y crece de cero a ∞, tomando como referencia al eje de las x, es además simétrica con respecto al eje de las y; esta propiedad es aclarada en el siguiente parágrafo.

Por otro lado, como puedes observar, la función decrece hasta llegar al punto más bajo de su variación en $x = 0$, continuando, a partir de este, con un crecimiento suave que la hace tender al infinito.

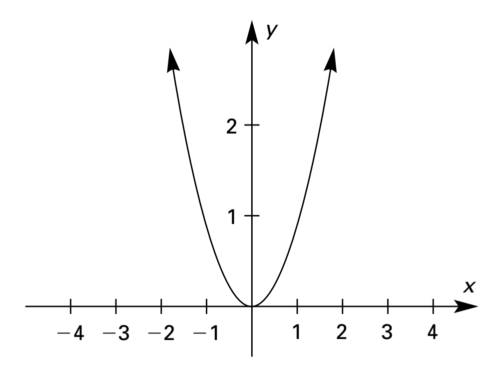


FIGURA 2.19. Gráfica de $y = x^2$.

Lo anterior es suficiente para definir de manera preliminar, *punto máximo* y *punto mínimo* de una curva de la siguiente manera:

> *El mayor valor que toma una curva en su variación es llamado punto máximo, en tanto que el menor valor que llega a tomar es un punto mínimo.*

[2-8]

Para el caso de la parábola, el punto mínimo representa el lugar o punto donde inicia su recorrido el contradominio o campo de variación, este último se representa como $[0, \infty)$, tanto el cero como el infinito son los valores extremos entre los que se mueven los valores de y, solo que el infinito es para la gráfica inalcanzable. Los valores del contradominio donde la función inicia y termina son llamados *cotas*; las cotas son, como vimos, de acuerdo a su valor numérico, *inferior* o *superior*. Para el caso de la parábola, se dice que *la función está acotada inferiormente* para $y \geq 0$ y, debido a que en el otro extremo la gráfica se *pierde* al infinito, diremos que no cuenta con cota superior. La definición preliminar de cota es la siguiente:

> *Una cota es un nivel o altura de la gráfica de una función representada por un valor numérico del contradominio. Se llama cota inferior si corresponde al inicio de la gráfica, y cota superior si se coloca en la parte donde esta concluye, o sobre la que tiende a plegarse en ambos casos.*

[2-9]

En la gráfica de la función $y = x^2$, Figura 2.21, hemos colocado diferentes cotas o niveles para valores de y, iniciando con el valor de la cota inferior $y = 0$ y continuando con cotas en los niveles que corresponden a $y = 1$, $y = 2$ e $y = 3$, dichos niveles están *uno por arriba del otro* en orden ascendente.

Imagina al eje y como una escalera sobre la que podemos subir, y donde cada peldaño representa un número entero 0, 1, 2, 3, …, de manera que al subir cada peldaño iremos pasando por diferentes *niveles* de la escalera. Tratándose de la gráfica de una curva $f(x)$, a cada uno de estos niveles se les conoce como *cotas* o alturas de la curva, y se escriben como $y = 0$, $y = \frac{1}{2}$, $y = 1$, etc.

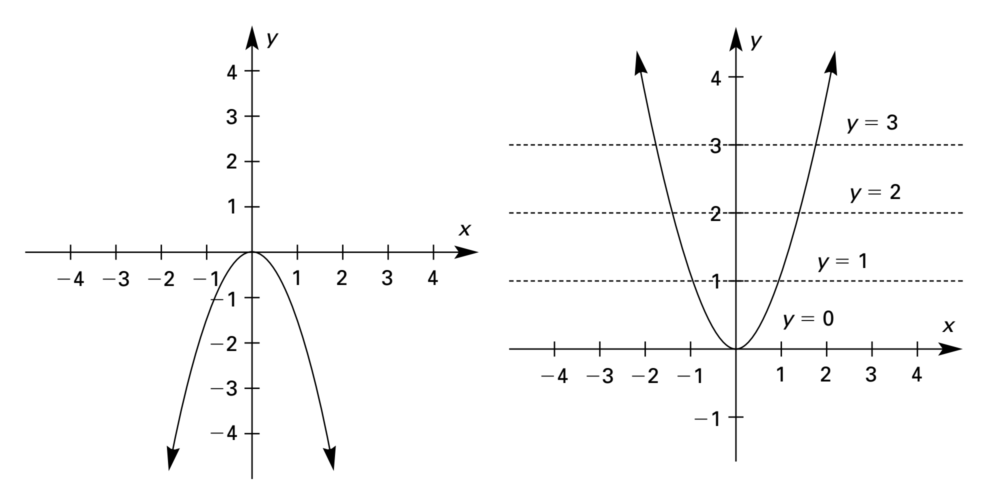


FIGURA 2.20. ¿Qué le hizo el signo menos a la función original?

FIGURA 2.21. Diferentes cotas de la función $y = x^2$.

El método de hacer uso de la recta a 45° para la construcción de funciones, tiene varias ventajas que iremos conociendo conforme avancemos en el curso.

En principio, la ventaja de partir de la recta a 45° permite que *encima* de ella podamos construir otras más; ello es importante debido a que no es lo mismo construir una gráfica a simplemente dibujarla, es semejante a quien construye una casa, o bien solamente la proyecta o dibuja en un plano, puesto que construirla ofrece más elementos para conocerla o *vivirla* mientras se construye, apreciándola más, a diferencia de sólo dibujarla. En este sentido diremos que la recta a 45° es una *función de referencia* o bien *función generadora de gráficas*. No obstante, el potencial constructivo de esta función se verá más adelante; mientras, te invitamos a *construir* de esta manera las gráficas de las funciones canónicas siguientes $y = x^3$, $y = x^4$, $y = x^5$, $y = x^6$, $y = x^7$, …, e identificar con ellas las *familias* de curvas involucradas.

2.3.4.6. Función par e impar

Las siguientes definiciones nos servirán para conocer con más precisión las propiedades de simetría de las funciones que vayamos construyendo (no se plantean demostraciones):

> *Se dice que una función es par si cumple con la operación* $f(-x) = f(x)$*. Es decir, si la función es simétrica con respecto al eje de las* y.

[2-10]

> *Se dice que una función es impar si cumple con la operación* $f(-x) = -f(x)$*. Es decir, si la función no es simétrica con respecto al eje de las y, siéndolo respecto al origen.*

[2-11]

El ejemplo más sencillo de una función par es el de $f(x) = x^2$. Si a esta le aplicamos la proposición [2-10] tendremos que:

$$f(-x) = (-x)^2$$

O sea:

$$f(-x) = x^2$$

(Recuerda que el signo también se eleva al cuadrado).

Lo cual deja ver que la función es par.

En la Figura 2.22 se puede observar que la gráfica de esta función es simétrica respecto del eje de las y, la cual es una característica de las funciones pares. Además, una función es simétrica respecto al eje y, si sus abscisas en ambos lados del origen son iguales en valor absoluto.

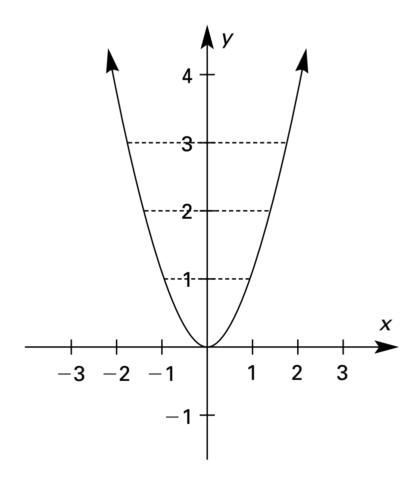


FIGURA 2.22. En una función par como $y = x^2$, las abscisas tienen la misma magnitud.

¿Qué puedes decir de la función $f(x) = x^3$?, ¿es par o impar? Para contestar lee cuidadosamente la definición correspondiente y aplícala a la función:

No obstante, existen funciones que no son ni pares ni impares; un caso es el siguiente $f(x) = \sqrt{1 - x}$. Verifica esto último aplicando las reglas anteriores.

En resumen, pudiéramos plantear aquí las propiedades de la función cuadrática $f(x) = x^2$, a partir del análisis que de ella hemos hecho, de la siguiente manera:

a) Su campo de existencia son todos los reales $\mathbb{R}$.
b) Su campo de variación son todos los reales positivos, incluyendo al cero.
c) La función es acotada inferiormente para $y \geq 0$, sin tener cota superior, pues se va a infinito.
d) La función toma un valor mínimo en $y = 0$ cuando $x = 0$.
e) La función es par y simétrica respecto al eje y.
f) Decrece de $(-\infty, 0)$ y crece de $(0, \infty)$.
g) La función intersecta al eje x en $x = 0$.
h) Es conocida como *cuadrática*.

Te pedimos que, a partir de este ejemplo, expongas un análisis semejante para la función $f(x) = x^3$ construida anteriormente.

2.3.4.8. La gráfica de $y = \sqrt{x}$

La gráfica de la función $y = \sqrt{x}$ tiene un trabajo semejante al aplicado para construir $y = x^2$; es claro que en lugar de elevar al cuadrado las ordenadas de la recta a 45°, será necesario *sacar raíz cuadrada* de ellas. Lo esencial consiste en evitar la parte donde las raíces son negativas o imaginarias, de la forma $y = \sqrt{-1}$, $y = \sqrt{-2}$, etcétera.

En esa parte la gráfica no existe, dado que su dominio son todos los valores de $x \geq 0$, por tanto la gráfica es una sola rama cuyo vértice se encuentra en el punto (0, 0). En la gráfica de la Figura 2.23, las ordenadas indican las raíces de los valores correspondientes a la recta a 45°.

La Figura 2.24, corresponde a la gráfica de la función $y = -\sqrt{x}$. ¿Qué le sucedió a la gráfica de la función $y = \sqrt{x}$ al multiplicarle por el signo menos?

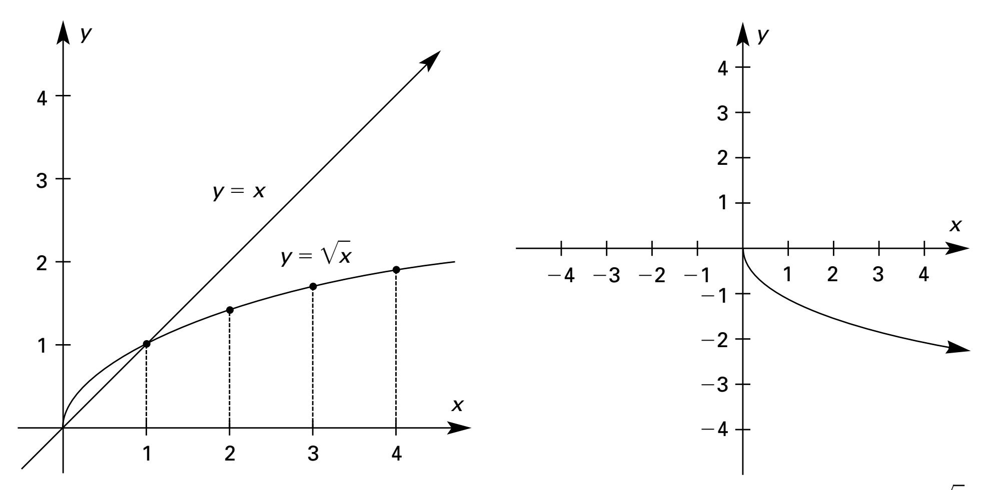


FIGURA 2.23. Gráfica de $y = \sqrt{x}$.

FIGURA 2.24. Gráfica de la función $y = -\sqrt{x}$.

Podríamos exponer el análisis de la función estándar *raíz cuadrada* de la siguiente manera:

a) Su campo de existencia son todos los valores de $x \geq 0$.
b) Su campo de variación son todos los valores de $y \geq 0$.
c) La función tiene una cota inferior en $x = 0$, (de pronto no es posible precisar si cuenta con cota superior).
d) No tiene máximos ni mínimos.
e) No es ni par ni impar.
f) La función solamente crece en el intervalo $[0, \infty)$.
g) La función interseca al eje x en $x = 0$.

2.3.4.9. La gráfica de la función valor absoluto

La función valor absoluto fue definida anteriormente como $f(x) = |x|$, donde:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{si } x \geq 0 \\ -x, & \text{si } x < 0 \end{cases} \quad \text{quedando: } f(x) = \begin{cases} x, & \text{si } x \geq 0 \\ -x, & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Cuyo dominio son todos los números reales $\mathbb{R}$ y el contradominio todos los números reales positivos. Su gráfica, Figura 2.25, es una *quebrada* formada por dos bisectrices simétricas respecto al eje y, la primera es la recta a 45° en el primer cuadrante y la segunda una recta a 135° en el segundo cuadrante, ambas son perpendiculares una con respecto a la otra.

Su construcción a partir de la recta a 45° es muy sencilla y obedece a la propia definición; es decir, la recta a 45° queda positiva en el primer cuadrante, puesto que así se define: x si $x \geq 0$, en tanto que la parte colocada en el tercer cuadrante, que es negativa, se multiplica por menos uno debido a la otra parte de la definición $-x$ si $x < 0$, lo cual conduce a que se refleje dando un giro de 90° hacia el segundo cuadrante.

La Figura 2.26 corresponde a la gráfica de la función $f(x) = -|x|$. ¿Qué efecto le hizo el signo menos a la función original $f(x) = |x|$?

Enumeremos las características de la función valor absoluto:

a) Su campo de existencia son todos los números reales $\mathbb{R}$.
b) Su campo de variación son todos los valores positivos de y incluyendo al cero.
c) La función es acotada inferiormente para $y \geq 0$.
d) Tiene un vértice agudo en el origen, que representa un mínimo, este aspecto será aclarado en los Capítulos cuarto y quinto.
e) La función es impar.
f) Decrece de $(\infty, 0)$ y crece de $(0, \infty)$.

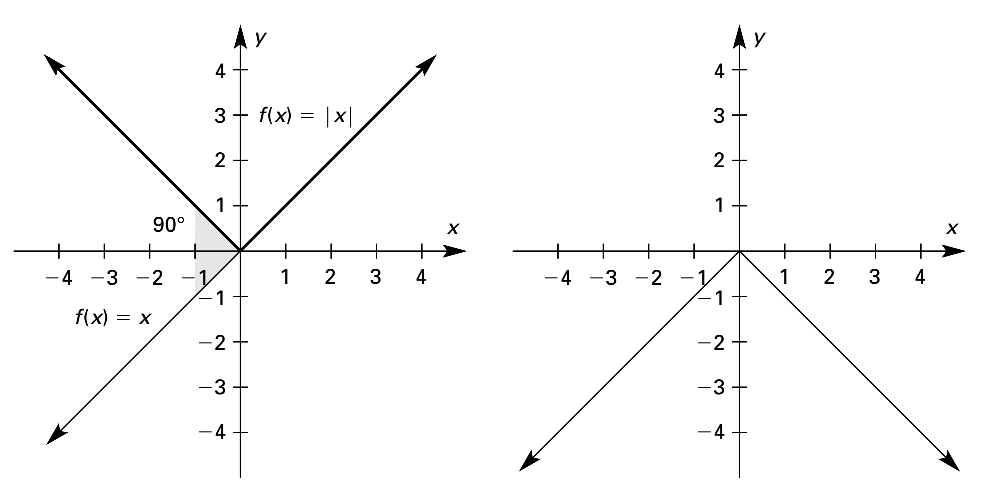


FIGURA 2.25. Gráfica de $y = |x|$.

FIGURA 2.26. Gráfica de $y = -|x|$.

EJEMPLOS

El efecto producido por el signo a la recta a 45° en el caso anterior, ejerce los mismos cambios a otro tipo de funciones. El ejemplo que se muestra en la gráfica de la Figura 2.27, se refiere a la función $f(x) = x^3$, a esta última le hemos aplicado la definición de valor absoluto en la forma $f(x) = |x^3|$; el efecto que se produjo es que la rama negativa de la función $f(x) = x^3$, que se encuentra en el tercer cuadrante, fue invertida mediante un giro y colocada en el segundo cuadrante.

¿Qué efecto le produce el valor absoluto a la función $f(x) = -x^2 + 2$, es decir $f(x) = |-x^2 + 2|$? Realiza el trabajo sobre las ramas en la Figura 2.28.

Haz lo mismo con la gráfica de las función, que ya vimos: $y = -\sqrt{x}$.

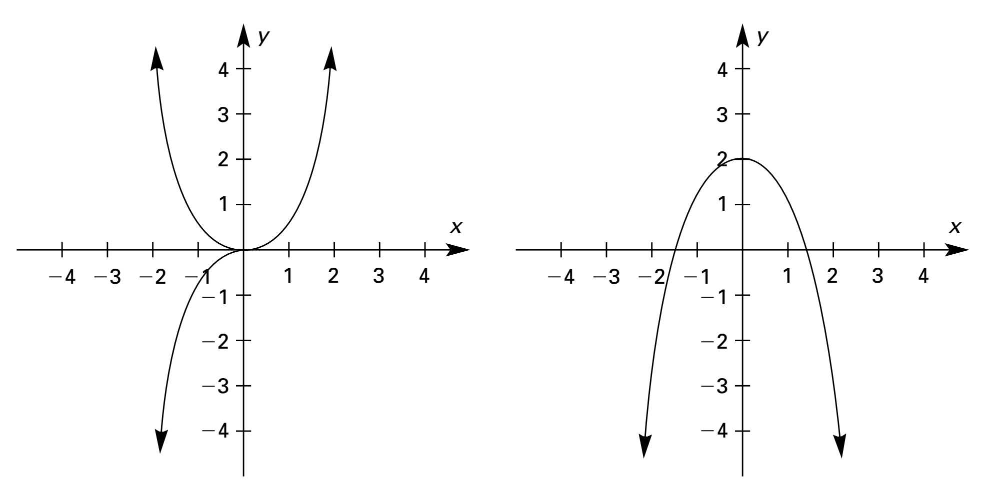


FIGURA 2.27. Gráfica de $y = |x^3|$ dibujada a partir de $y = x^3$.

FIGURA 2.28. Dibuja, a partir de la gráfica dada de $y = f(x)$, la gráfica de $y = |f(x)|$.

2.3.4.10. La gráfica de la función $y = \frac{1}{x}$ como recíproca de $y = x$

¿Cómo usar la recta a 45° para construir la curva correspondiente a la función $y = \frac{1}{x}$? Pareciera una cuestión difícil; generalmente en los libros de texto de cálculo le dejan para el capítulo de límites por las implicaciones que tiene con estos. En nuestro caso, intentaremos una estrategia sencilla a través de la recta a 45°. No obstante, será necesario convenir en algunas operaciones que tienen que ver con la división por cero.

Si analizamos ambas funciones, $y = x$ e $y = \frac{1}{x}$, estas tienen la característica de ser una *recíproca* de la otra. Esto último significa que las operaciones que se hagan a una, a la otra le ocurren las operaciones contrarias, sobre todo aquellas de dar un valor a una en tanto la otra se reduce y viceversa. En la Tabla 2.10 hemos colocado algunos valores.

¡OJO!, Es común equivocar y suponer que la función $y = \frac{1}{x}$ es *inversa* de $y = x$. La razón de esta conveniencia es que la última expresión se puede escribir como

$y = x^{-1}$. No obstante, ello es falso, como veremos más adelante al definir una función inversa.

Al dar a la función identidad un valor como $x = \frac{1}{100}$, la función recíproca toma el valor de 100; si damos a la primera el valor de cero, la recíproca cambia a $\frac{1}{0}$, lo cual indica que su gráfica se va a infinito; esta particularidad de la curva se escribe diciendo que *cuando* x *sea muy pequeña la* y *se vuelve tan grande como se desee*. En $x = 1$ ambas funciones coinciden o son iguales, para $x = 2$ la función recíproca cambia a $\frac{1}{2}$, para $x = 100$ la recíproca toma un valor muy pequeño, que es $\frac{1}{100}$, y para un valor de x aún más grande como $x = 1.000$, la recíproca toma un valor todavía más pequeño, como es $\frac{1}{1.000}$, lo cual indica que su gráfica se aproxima a cero.

TABLA 2.10

x	$y = x$	$y = \frac{1}{x}$
1\100	1\100	100
0	1\0	
1	1	1
2	2	1\2
100	100	1\100
1.000	1.000	1\1.000

En resumen, diremos que cuando la gráfica de la función identidad se acerca a cero para valores pequeños de x, la gráfica de la función recíproca crece o decrece ilimitadamente, y viceversa, cuando la gráfica de la identidad se hace muy grande, la gráfica de la recíproca se va a cero. Véase la Figura 2.29.

En este caso la recta a 45° se *parte* en dos, ambas ramas de la función recíproca quedan en los mismos cuadrantes donde se coloca la gráfica de la identidad, de aquí podemos afirmar que es simétrica respecto al origen. La recíproca, en este caso, es conocida como *hipérbola equilátera* de la familia de las *funciones homográficas* (es de-

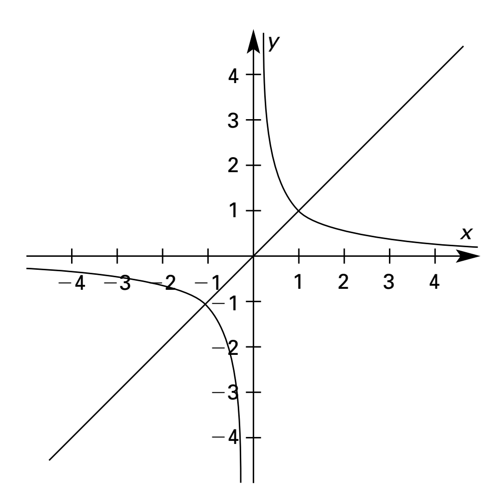


FIGURA 2.29. Hipérbola equilátera.

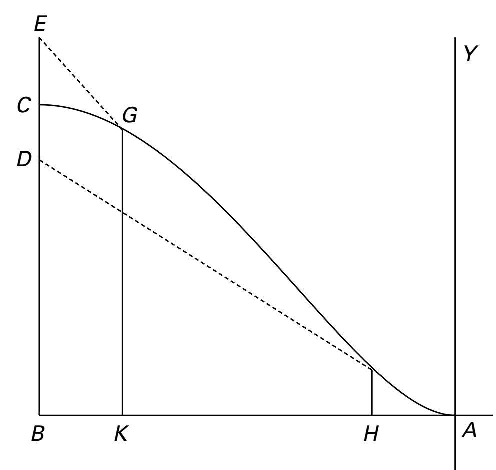


FIGURA 2.30. Curva diseñada por F. Díaz Covarrubias en el texto de cálculo titulado *Análisis trascendente*. El libro de Díaz Covarrubias puede considerarse el primero en esta disciplina escrito en 1873 para la enseñanza preparatoria.

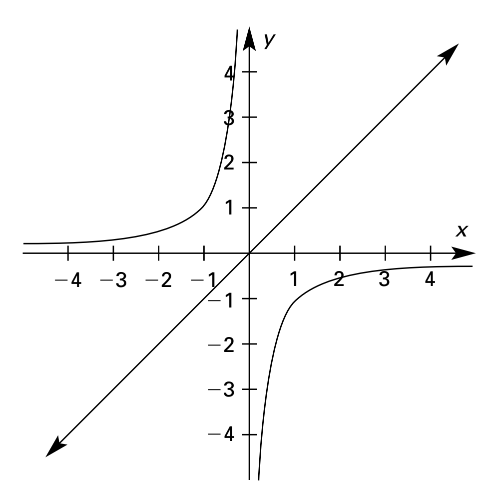


FIGURA 2.31. Las asíntotas son líneas rectas sobre las que se va replegando la gráfica de la función. Del griego *asymptotos*, o sea, que no coincide.

cir que se pueden expresar de diversas maneras, como por ejemplo en la forma de una función polinomial).

Podemos resumir las propiedades de la hipérbola equilátera de la siguiente manera:

a) Su campo de existencia es $(-\infty, 0) + (0, \infty)$.
b) Su campo de variación es $(-\infty, 0) + (0, \infty)$.
c) La función está acotada para $y > 0$ e $y < 0$.
d) No cuenta con valores máximo o mínimo.
e) Es simétrica respecto al origen, es decir es impar, como lo es la función identidad.
f) Decrece en $(0, \infty)$ y crece en $(-\infty, 0)$.
g) No tiene intersecciones con el eje x.

Además, la gráfica se va *acostando* por arriba y abajo del eje y, y por los costados sobre el eje de las x. Debido a esto último, se dice que los dos ejes son *asíntotas* de la gráfica de la función $y = \dfrac{1}{x}$ (Véase la gráfica de la Figura 2.31).

Las asíntotas son líneas rectas que tienen por ecuación una *función constante* como las ya vistas, que se denota como $y = c$, en este caso las ecuaciones de las asíntotas son $y = 0$ para el eje x, y $x = 0$ para el eje y. De aquí la siguiente definición:

> *Si* f *es una función racional de la forma* $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ *en las que* P *y* Q *son funciones continuas en* $x = a$, *si* $Q(a)$ *y* $P(a) \neq 0$, *entonces* f *tiene una asíntota en* $x = a$.

[2-12]

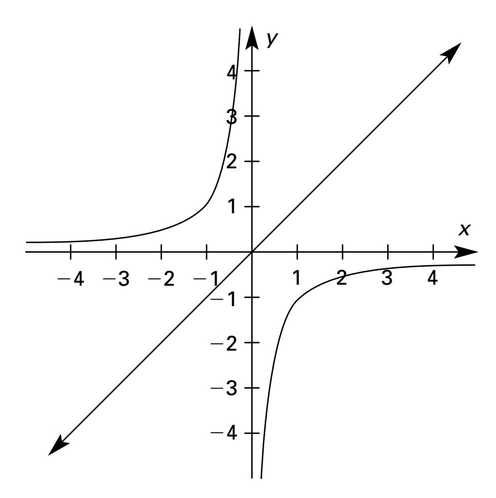


FIGURA 2.32. Gráfica de $y = -\frac{1}{x}$.

La gráfica de la Figura 2.32 corresponde a la función $y = -\frac{1}{x}$. ¿Qué efecto hizo el signo a la función original?

¿Cómo serán las ecuaciones para las asíntotas de una curva, en tanto una pasa por el eje x en 5, y otra por el eje y en 3? Escríbelas en forma de función.

2.3.4.11. La gráfica de la función $y = \frac{1}{x^2}$ a través de su recíproca $y = x^2$

Hasta aquí hemos visto a la función identidad como una función generadora de funciones elementales; sin embargo, pudiéramos enseguida hacer uso de las funciones hasta ahora construidas para seguir diseñando otras funciones importantes en el estudio del cálculo.

Obsérvese que la función $y = \frac{1}{x^2}$ es la recíproca de la función $y = x^2$, esto último nos permitirá hacer uso de las ideas que aplicamos en la graficación de la función $y = \frac{1}{x}$ a través de la función identidad.

En la Figura 2.33, se nota que cuando la gráfica de la función $y = x^2$ adopta valores muy pequeños de x, cercanos a cero, su recíproca $y = \frac{1}{x^2}$ toma valores exageradamente grandes o al infinito.

De igual forma, cuando la función toma valores de x muy grandes, la gráfica de la recíproca se acerca a cero, puesto que x asume valores muy pequeños; por su lado, ambas coinciden en $x = 1$ y $x = -1$.

En resumen (véase la Figura 2.34):

a) Su dominio son todos los números reales $\mathbb{R}$, en tanto que el cero no esta definido.

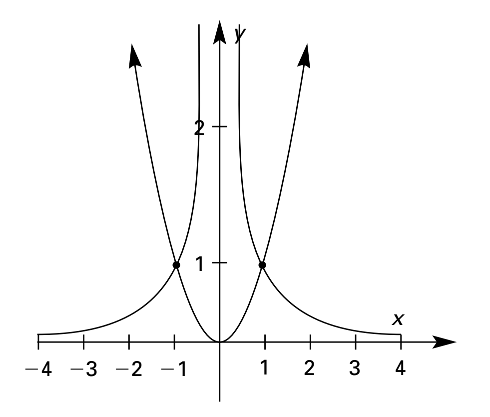


FIGURA 2.33. Si x se va a cero en $y = x^2$, entonces x se va a infinito en su reciproca $y = 1/x^2$.

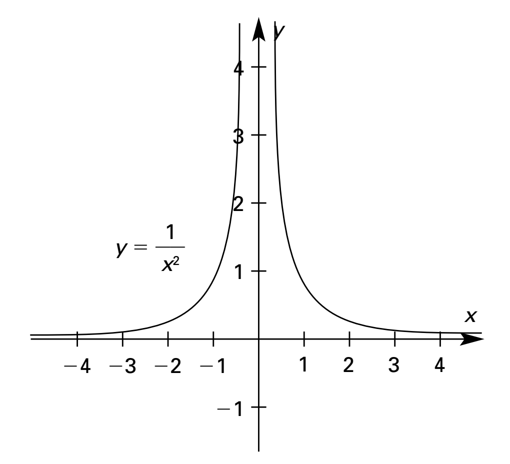


FIGURA 2.34. Gráfica de $y = \dfrac{1}{x^2}$

b) Su contradominio se coloca solamente en los reales $\mathbb{R}$ positivos sin, además, tomar al cero.
c) La función está acotada inferiormente en $y > 0$.
d) No toma valores máximos o mínimos.
e) La función es simétrica respecto al eje y, y par.
f) Crece de $(-\infty, 0)$ y decrece de $(0, \infty)$.
g) Consta de dos ramas simétricas con respecto al eje de las y, que tienen por asíntotas ambos ejes.
h) Al igual que la cuadrática, su recíproca es una función simétrica con respecto al eje y, consecuentemente es par.

En la Figura 2.35, colocamos la gráfica de la función $y = -\dfrac{1}{x^2}$. Observa el efecto que hace el signo a la función original $y = \dfrac{1}{x^2}$.

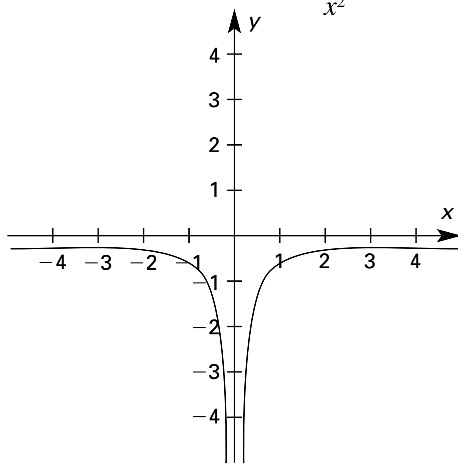
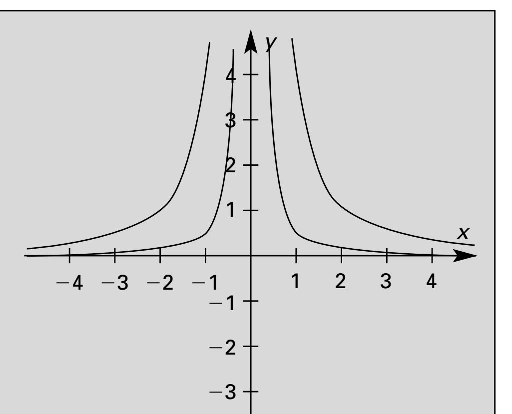


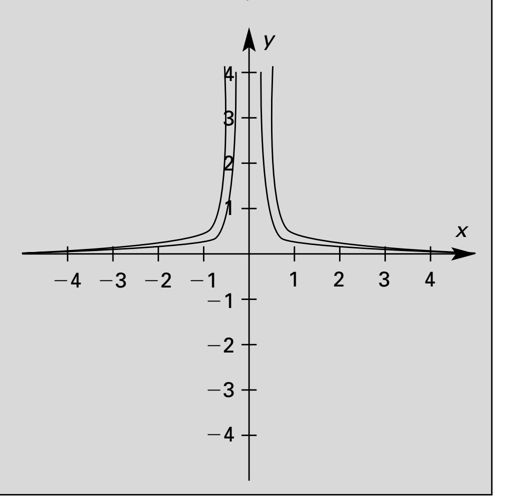
FIGURA 2.35. Gráfica de la función $y = -\dfrac{1}{x^2}$.

El efecto que hace el parámetro a es contrario en las funciones homográficas, por ejemplo, en el caso de la función $y = \frac{a}{x^2}$, para valores de $a > 1$ las gráficas tienden a despegarse del eje y.



Las gráficas que aparecen corresponden a $y = \frac{1}{x^2}$ e $y = \frac{6}{x^2}$.

El caso contrario, en el que las ramas se plegan al eje y sucede para valores de $a < 1$. Los casos de la gráfica siguiente son para $y = \frac{1}{x^2}$ e $y = \frac{1}{2x^2}$, $a = \frac{1}{2}$.



Con esta misma idea es posible generar un sinnúmero de familias de funciones; particularmente te proponemos construir las siguientes: $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$, $y = \frac{-1}{\sqrt{x}}$, $y = \frac{1}{x^4}$, $y = \frac{-1}{x^4}$, $y = \frac{1}{x^5}$, $y = \frac{-1}{x^5}$, en las cuales hay que analizar cómo cambia una curva respecto a su recíproca y determinar además dominio, contradominio, simetría con respecto a los ejes y asíntotas. Recuerda que en la primera de estas $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$, la x no puede tomar el valor de cero.

2.3.4.12. Efectos de giro

Antes de continuar usando las ideas anteriores en la construcción de otro tipo de funciones, analicemos algunos efectos importantes que causan las constantes asociadas a las variables de las funciones que hasta aquí hemos visto.

La constante a que multiplica a x es generalmente llamada pendiente de la recta y se denota como m.

Observa, en la Figura 2.36, el efecto de *giro* o contracción que hace a la función $y = ax$ el valor de a. Si $a = 1$ tendremos el caso de la recta a 45°, no obstante, si $a > 1$ las rectas que resultan giran tendiendo a *plegarse* al eje de las y.

Más no por ello se puede afirmar que este sea una asíntota para las rectas. En todo caso, y a través de este efecto, podríamos afirmar que las rectas de la forma $y = ax$ *tienen por límite* al eje de las y. ¿Comprendes esto último?

En la Figura 2.37, aparece el efecto que hace la misma constante a las rectas de la forma $y = -ax$. ¿Hacia qué eje tienden a plegarse las rectas?

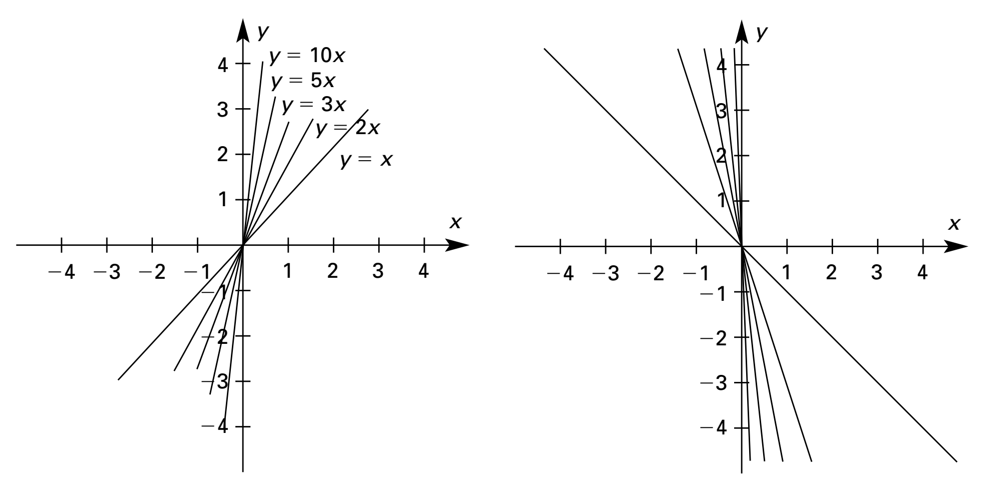


FIGURA 2.36. Contracción de $y = x$ para $a > 1$.

FIGURA 2.37. Confracción para el caso $y = -ax$.

El efecto de giro que hacen valores de $a < 1$ es el de replegarse o tender las rectas hacia el eje de las x, como se aprecia en la Figura 2.38. Para el ejemplo se tomaron valores para $a = 1$, $a = 0{,}5$, $a = 0{,}25$ y $a = 0{,}01$.

Las anteriores secuencias de gráficas, figuras 2-39 (página anterior), muestran los movimientos de giro que hace la constante a a la función $y = a\sqrt{x}$, tomando valores de $a = 1$, $a = 2$, $a = 5$ y $a = 10$. En la Figura 2.40, se ve en conjunto la misma secuencia de la familia de curvas de la forma $y = a\sqrt{x}$. Se aprecia como las gráficas tienden a plegarse al eje y.

Para valores de $a < 1$, la secuencia se puede ver en Figura 2.41, nótese como las gráficas tienden a plegarse al eje x.

Enseguida te pedimos construir, con esta misma idea de multiplicar la función en la forma $af(x)$, familias de curvas para las funciones que se dan. Comprueba con ello que los efectos de giro para los valores $a > 1$ y $a < 1$ son de la misma naturaleza que para las funciones que graficamos:

$$y = ax^2,\ y = -ax^2,\ y = a|x|,\ y = -a|x|,\ y = \frac{a}{x},\ y = \frac{-a}{x}$$

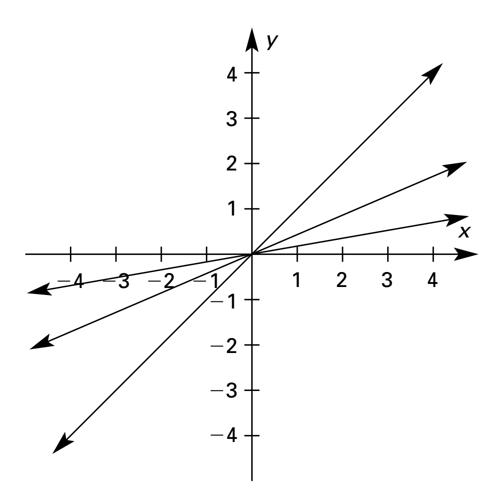


FIGURA 2.38. Confracción en $y = x$ para $a < 1$.

$a = 1$ en $y = \sqrt{x}$

$y = 2\sqrt{x}$

$y = 5\sqrt{x}$

$y = 10\sqrt{x}$

FIGURAS 2-39. Proceso de confracción para $y = a\sqrt{x}$.

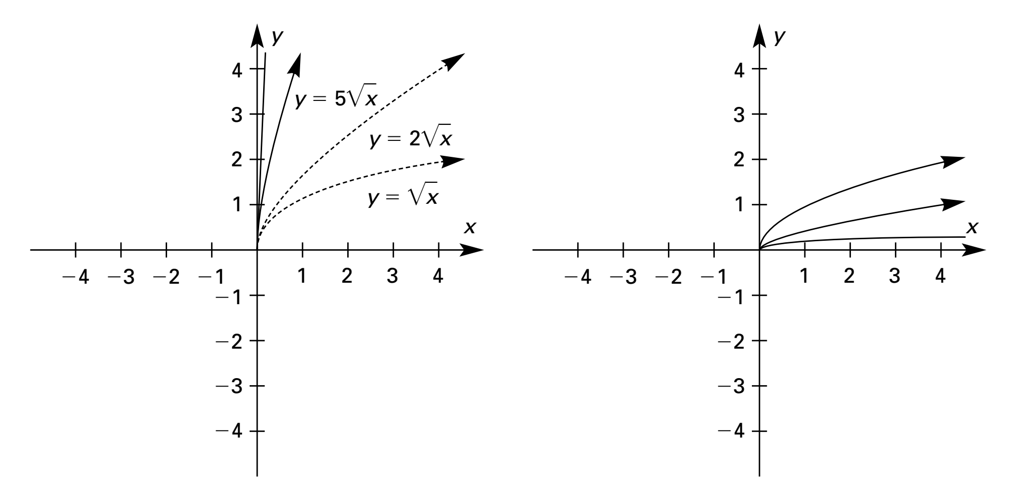


FIGURA 2.40. $y = a\sqrt{x}$, $a > 1$. **FIGURA 2.41.** $y = a\sqrt{x}$, $a < 1$.

2.3.4.13. Efecto de traslación

Si reconsideramos la ecuación de la recta en la forma $y = ax + b$, reconoceremos que para $x = 0$, queda la ecuación como $y = b$, lo cual indica que la gráfica de la recta tiene un punto cuyas coordenadas son $(0, b)$. Para un caso particular, como por ejemplo $y = 3x + 1$; se observa que la recta a 45° es multiplicada por $a = 3$, valor que como vimos la va a replegar hacia el eje de las y, y para $x = 0$, $b = 1$, de manera que este último efecto le trasladará tres unidades sobre el eje de las y, iniciando en cero. Véase las figuras 2.42 y 2.43. Cualquiera que haya graficado una recta, asumirá que este es un trabajo infructuoso debido a que bastaría con determinar dos valores de la recta para obtener su gráfica. No obstante, nuestro interés va más haya de solamente determinar la gráfica de una línea recta, este se centra en generalizar el método en la construcción de curvas que contengan los parámetros a y b.

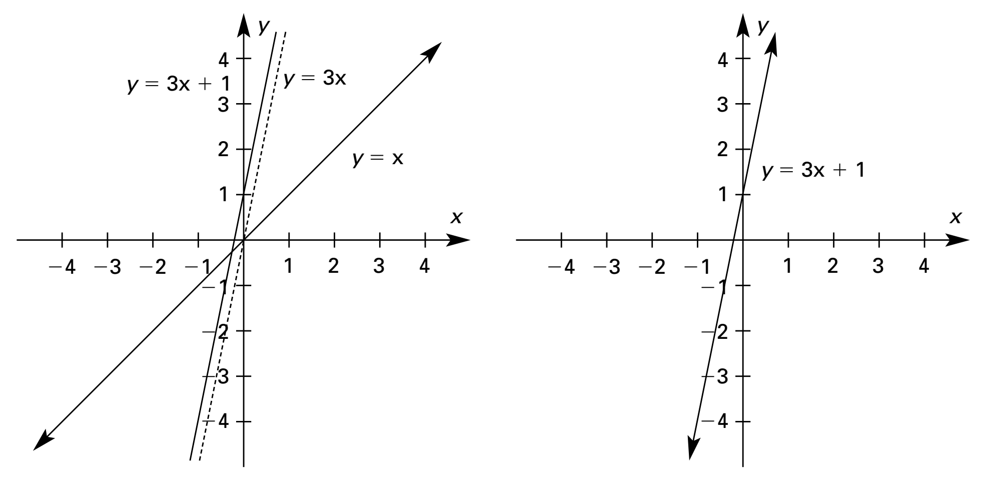


FIGURA 2.42. Proceso de graficación para $y = 3x$. **FIGURA 2.43.** Traslación para $y = 3x + 1$.

El efecto que se da a la función en este ejericio se puede escribir algebraicamente como $af(x) + b$.

Observa en la Figura 2.44, los trazos efectuados para llegar a la gráfica de la función $y = 2\sqrt{x} + 1$.

Aquí, la función canónica $y = \sqrt{x}$ es multiplicada por 2, parámetro que hace que la gráfica tienda a contraerse hacia el eje y, en tanto que al sumarle el 1, lo que sucede es que la gráfica se desplaza una unidad en la dirección del eje de las y, es decir, sus ordenadas, en conjunto, son desplazadas en esa dirección una unidad. En la Figura 2.45 se encuentra la gráfica de la función $y = 2\sqrt{x} + 1$.

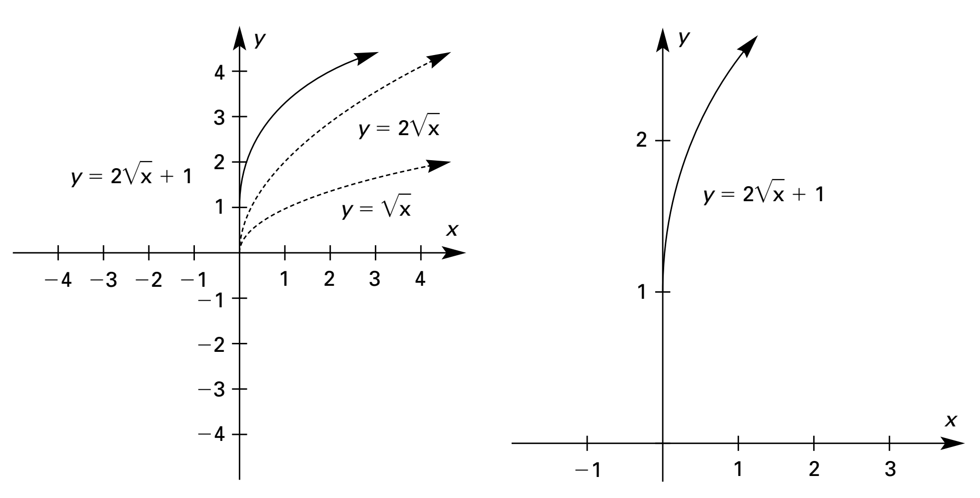


FIGURA 2.44. Efecto de confracción para $y = 2\sqrt{x}$.

FIGURA 2.45. Traslación en $y = 2\sqrt{x} + 1$.

El efecto que hacen los parámetros a y b a la función es de la forma $y = af(x) + b$. Como en $y = \dfrac{-3}{x} + 2$.

Con este procedimiento es posible construir la gráfica de funciones, como por ejemplo $y = -\dfrac{3}{x} + 2$, la cual se dibuja a través de la ecuación de la hipérbola equilátera invertida $y = \dfrac{-1}{x}$, véase la Figura 2.46.

Ello se debe a que está multiplicada por el signo menos, la multiplicación por el 3 hace el efecto de despegar sus ramas del eje de las y, en tanto que el 2 le desplaza esa cantidad de unidades sobre el mismo eje. Este último efecto hace que la asíntota $y = 0$ de la ecuación canónica, se desplace también dos unidades, la ecuación de esta última es $y = 2$. La gráfica final de la función $y = -\dfrac{3}{x} + 2$ es la de la Figura 2.47. Recuerda que el efecto dado algebraicamente a la función es de la forma $af(x) + b$.

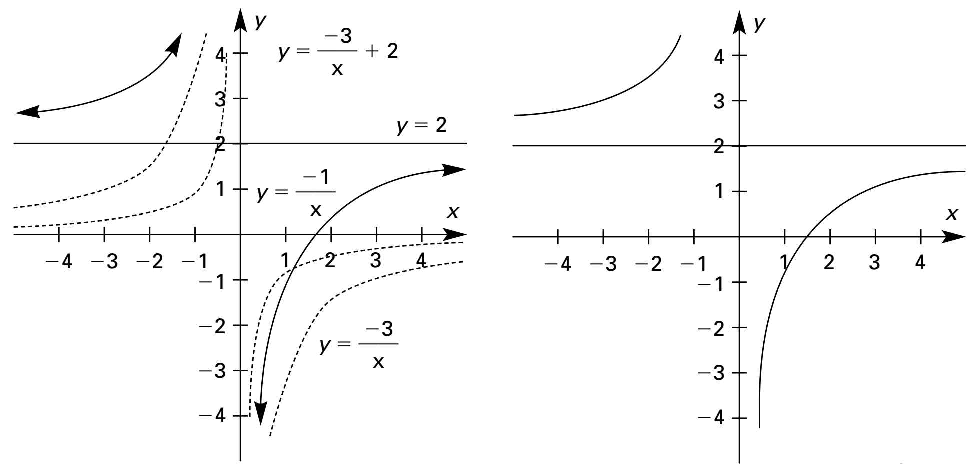


FIGURA 2.46. Efectos de confracción y traslación en $y = -\dfrac{3}{x} + 2$.

FIGURA 2.47. Gráfica final de $y = -\dfrac{3}{x} + 2$.

2.3.4.14. Efecto de desplazamiento horizontal

Una función, como por ejemplo $y = \sqrt{x - 2}$, puede fácilmente construirse si iniciamos dibujando la función canónica correspondiente, es decir, $y = \sqrt{x}$ a la vez que la desplacemos horizontalmente dos unidades, puesto que la función inicia su dominio en $x = 2$, véase Figura 2.48. Este desplazamiento tiene la forma algebraica $y = f(x - c)$. Véase la Figura 2.49.

El caso de funciones como $y = \sqrt{2 - x}$, cuya expresión canónica es de la forma $y = \sqrt{-x}$, véase Figura 2.50, la cual tiene su dominio en $(-\infty, 0]$ y cuya gráfica aparece a la Figura 2.51, se desplaza dos unidades sobre el eje x terminando su gráfica en $x = 2$, puesto que su dominio es $(-\infty, 2]$.

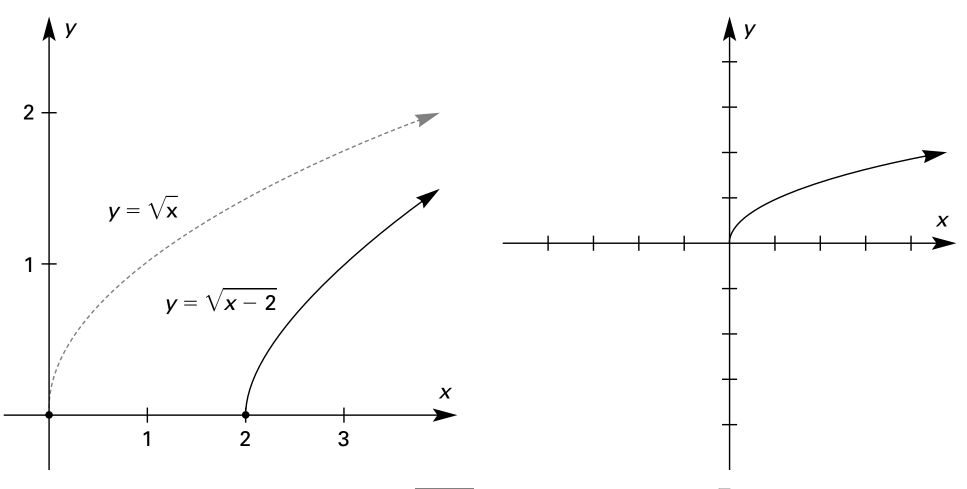


Figura 2.48. Desplazamiento en $y = \sqrt{x - 2}$.

FIGURA 2.49. $y = \sqrt{x}$.

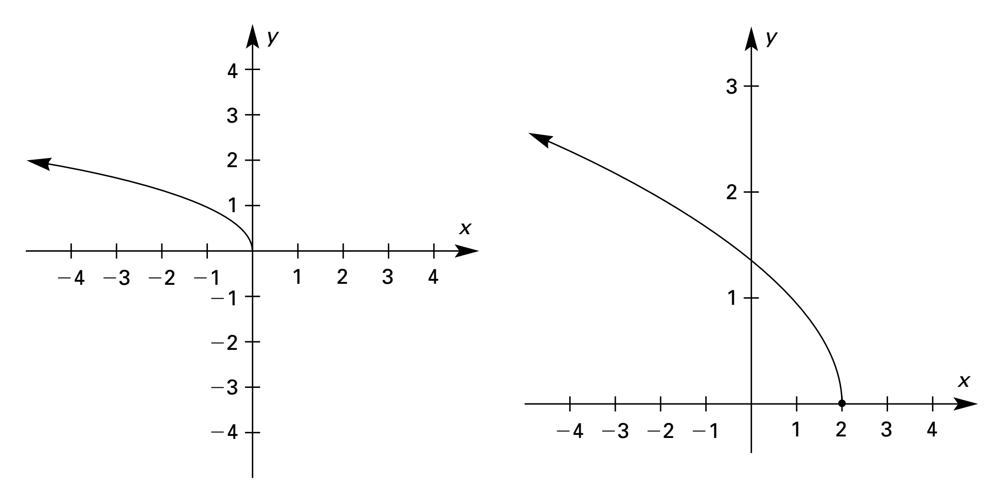


FIGURA 2.50. Gráfica de la función $y = \sqrt{-x}$.

FIGURA 2.51. Desplazamiento para $y = \sqrt{2 - x}$.

Para expresiones como la parábola estándar $y = x^2$, es común verla expresada en forma anidada como $y = (x - 0)^2$ con valores numéricos reales en el paréntesis en la forma $y = (x - c)^2$. En estas funciones el desplazamiento lo decide el signo del valor de c.

Supongamos el siguiente caso: $y = (x - 3)^2$, el desplazamiento horizontal de la parábola estándar ocurre a través de su vértice, el cual se encuentra en (0, 0) y se desplaza hacia (3, 0), como se puede ver en la gráfica de la Figura 2.52.

Si a esta última le agregamos un dos como $y = (x - 3)^2 + 2$, tendremos la misma parábola estándar trasladada dos unidades a partir de su última posición y sobre un eje hipotético paralelo al eje y, dos unidades, de manera que el vértice quedará en el punto (3, 2). Las últimas gráficas de la Figura 2.53 corresponden a esa expresión. Algebraicamente le podemos escribir como $y = f(x - c) + b$.

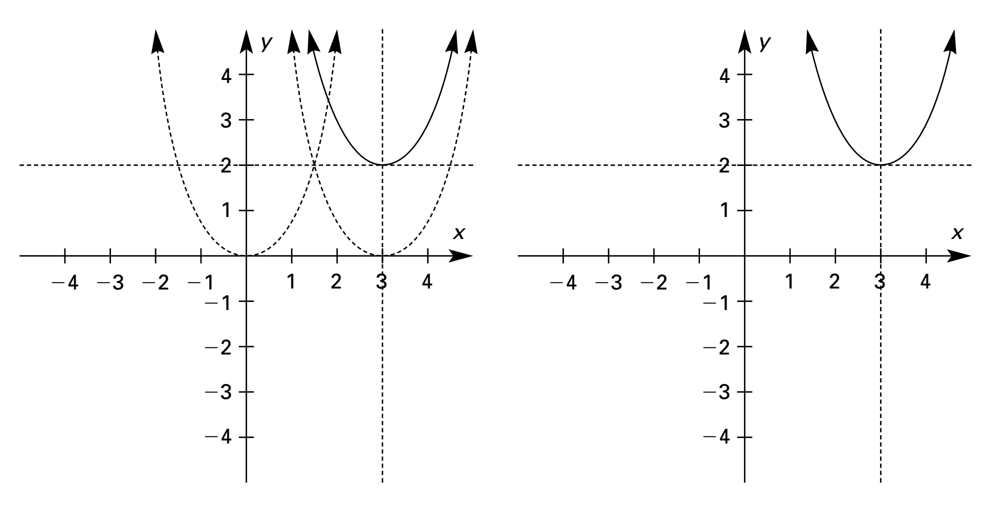


FIGURA 2.52. Traslación con $y = (x - 3)^2$.

FIGURA 2.53. $y = (x - 3)^2 + 2$.

Finalmente: ¿Qué le sucede a la gráfica si a la expresión $y = (x - 3)^2 + 2$, le agregamos un valor como 5 multiplicando al paréntesis, de la siguiente manera $y = 5(x - 3)^2 + 2$? (véase el proceso de graficación en las Figuras 2.52, 2.53 y 2.54).

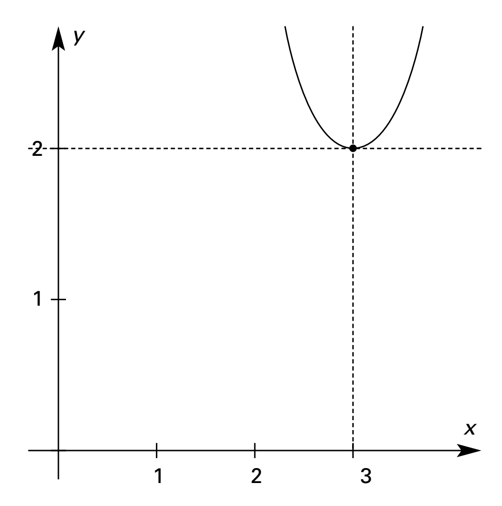


FIGURA 2.54. Desplazamiento, traslación y pliegue de las alas de la parábola $y = 5(x - 3)^2 + 2$.

Esto ya lo experimentaste, obviamente que las ramas de la parábola tenderán a plegarse al eje hipotético $y = 3$, tal como se aprecia en la gráfica de de la Figura 2.55. Algebraicamente se describen los efectos como $y = af(x - c) + b$.

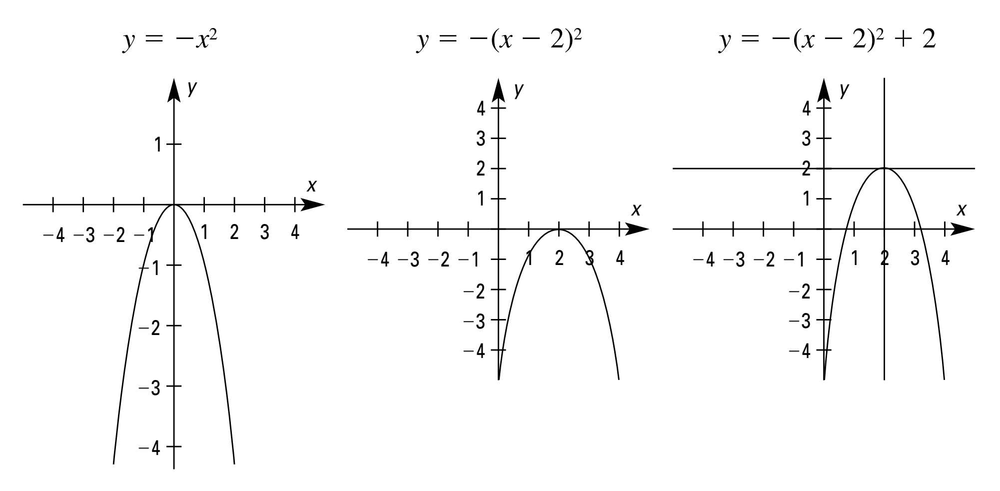
Como ejemplo, grafiquemos enseguida la parábola $y = -x^2 + 4x - 2$. Para ello, llevémosla antes a la forma $y = f(x - c) + b$. Primero factoricemos el signo $y = -(x^2 - 4x + 2)$; enseguida completemos el trinomio cuadrado perfecto, quedando $y = -(x^2 - 4x + 4 - 4 + 2)$; es decir $y = -[(x - 2)^2 - 2]$, o bien:

$$y = -(x - 2)^2 + 2$$

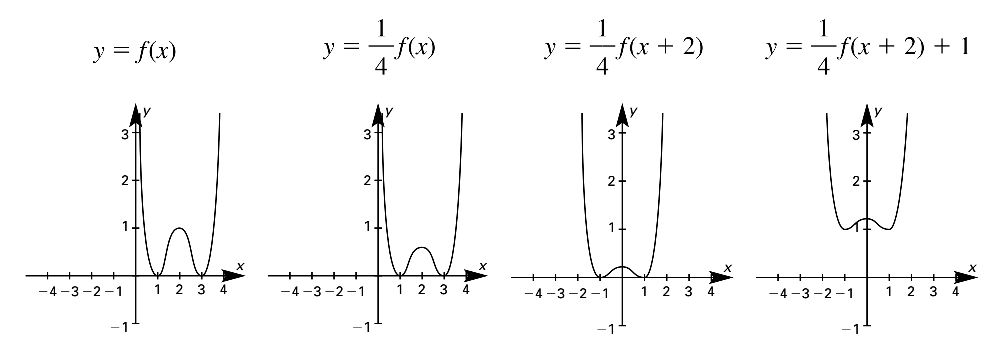
Para determinar el TRINOMIO CUADRADO PERFECTO (T.C.P.) de una expresión cuadrática se eleva al cuadrado el coeficiente que multiplica al valor de x *de primer grado, luego se divide este entre cuatro, sumándose y restándose de la expresión, reduciendose así el T.C.P. a un binomio elevado al cuadrado.*

Con esta transformación se observa que las ramas de la parábola abren hacia abajo; esto por el signo negativo, se desplaza horizontalmente dos unidades a la derecha y verticalmente dos unidades, el vértice se encuentra en el punto (2, 2). El proceso de graficación se puede apreciar en las Figuras 2.57.

Como último ejercicio, desplacemos con los tres parámetros vistos, una curva $y = f(x)$ cualquiera, por ejemplo la que se muestra, véanse las figuras 2.56.



FIGURAS 2.55. Proceso de desplazamiento y traslación para $y = -(x - 2)^2 + 2$.



FIGURAS 2.56. Proceso de desplazamiento, traslación y confracción para $y = f(x)$.

ACTIVIDADES Y EJERCICIOS DE GRAFICACIÓN DE FUNCIONES ELEMENTALES. SECCIÓN 2.3.4

1. Construir las gráficas de las siguientes rectas y funciones de valor absoluto, haciendo uso de los efectos de traslación vistos.

a) $y = mx + b$; $m = \frac{1}{2}$, $b = 1$; $m = 2$, $b = -1$; $m = -100$, $b = 3$; $m = \frac{1}{100}$, $b = 2$; $m = 0$, $b = -1$

b) $y = 3|x - 1|$

c) $y = \frac{1}{2}|4 - x|$

d) $y = -2|x + 3| - 1$

e) $y = \frac{|x|}{x}$ (Use la definición de valor absoluto)

2. Construir las gráficas de las siguientes funciones racionales enteras de segundo grado.

a) $y = ax^2 + b$, para $a = 1, b = 2; a = 2, b = -1; a = \frac{1}{10}, b = 0; a = \frac{-1}{5}$, $b = -2$

b) $y = a(x - c)^2 + b$, para $a = 5, b = 1, c = 2; a = \frac{1}{4}, b = -2, c = -2;$ $a = 10, b = 3, c = \frac{3}{4}; a = -2, b = -2, c = 1; a = 100, b = 0{,}745, c = 0{,}21;$ $a = 0{,}003, b = 1, c = 2$

3. Completando el trinomio cuadrado perfecto, y haciendo uso de los efectos de traslación antes vistos, se pide graficar:

a) $y = ax^2 + bx + c$, para 1.º $a = 1, b = -2, c = 3$; 2.º $a = -2, b = 6, c = 0$; 3.º $a = \frac{1}{2}, b = 5, c = 3$; 4.º $a = 5, b = 2, c = 125$

b) La siguiente función (una parábola) $y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}$, corresponde a la figura de un espejo cóncavo, cuya característica es que los rayos que surgen del foco, en este caso el origen, al reflejarse son todos paralelos al eje y. Construye la gráfica correspondiente a la función y prueba la veracidad del paralelismo de los rayos.

4. Construir las gráficas de las siguientes funciones racionales enteras de tercero y cuarto grado.

a) Haciendo uso de los efectos vistos 1.º $y = x^3 + 2$, 2.º $y = 5x^3 - \frac{3}{4}$, 3.º $y = -x^3 - 2$

b) Construyendo una tabla de valores $y = 3x^3 + 5x^2 - 2x + 1$

c) A partir de los efectos de traslación: $y = -2(x - 3)^3 + 2$

d) $y = x^4$, multiplicando gráficamente $x^2 \cdot x^2$

e) $y = 2x^2 - x^4$ multiplicando gráficamente $x^2(2 - x^2)$

5. Graficar las siguientes funciones irracionales haciendo uso de la función irracional canónica $y = \sqrt{x}$, y los efectos de traslación antes vistos.

a) $y = \sqrt{2 - x}$

b) $y = 4\sqrt{x + 1}$

c) $y = \frac{-1}{2}\sqrt{3x - 1}$

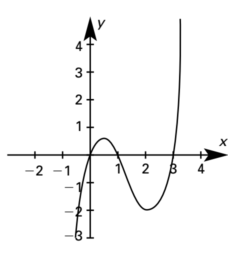
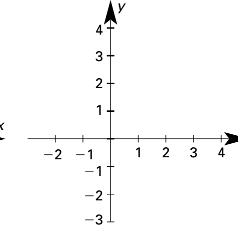
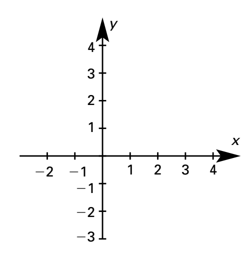
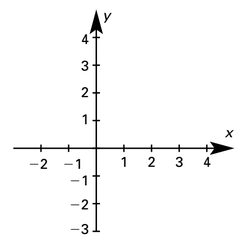
d) $y = 3\sqrt{x^2 - 25}$

e) $y = -2\sqrt{1 - x^2} + 2$

6. Dada la gráfica de $y = f(x)$, describe los desplazamientos y traslaciones que se piden.

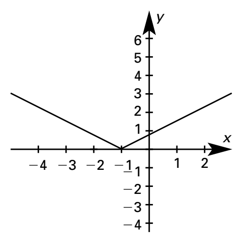
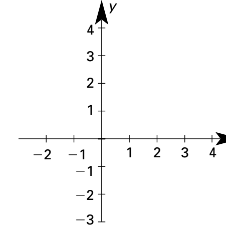
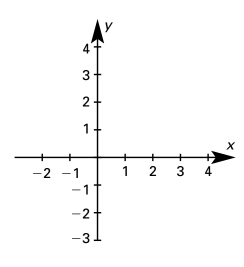
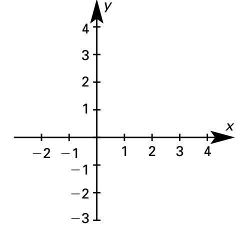
a)

$y = f(x)$ $\quad$ $y = 3f(x)$ $\quad$ $y = 3f(x - 2)$ $\quad$ $y = 3f(x - 2) + 1$

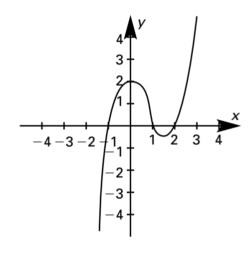
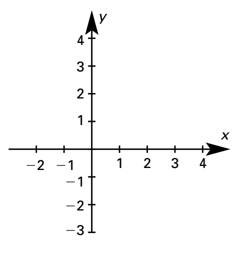
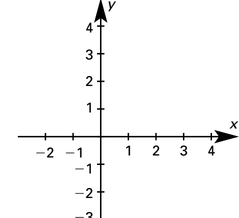
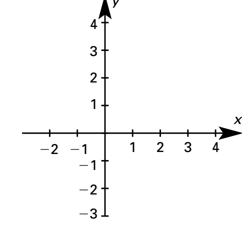
b)

$y = f(x)$ $\quad$ $y = -\frac{1}{2}f(x)$ $\quad$ $y = -\frac{1}{2}f(x + 1)$ $\quad$ $y = -\frac{1}{2}f(x + 1) - 2$

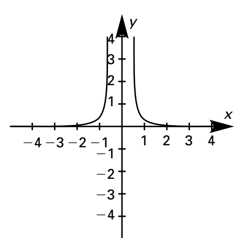
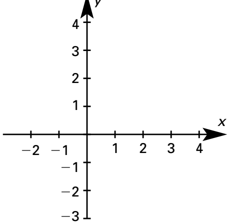
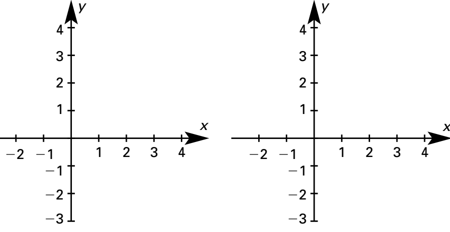
c)

$y = f(x)$ $\quad$ $y = -\frac{1}{2}f(x)$ $\quad$ $y = -\frac{1}{2}f(x + 1)$ $\quad$ $y = -\frac{1}{2}f(x + 1) - 2$

d)

$y = f(x)$ $\quad$ $y = -\frac{1}{2}f(x)$ $\quad$ $y = -\frac{1}{2}f(x + 1)$ $\quad$ $y = -\frac{1}{2}f(x + 1) - 2$

7. Graficar las siguientes funciones homográficas a partir de la función recíproca asociada, indicar las asíntotas correspondientes y verificar si son funciones par, impar o ninguna de estas.

a) $y = \dfrac{1}{1 - x}$, a partir de la gráfica de la función $y_1 = 1 - x$.

b) $y = \dfrac{2}{x + 2}$, a partir de la gráfica de la función $y_1 = x + 2$.

c) $y = \dfrac{1}{x^2 - 1}$, a partir de la gráfica de la función $y_1 = x^2 - 1$.

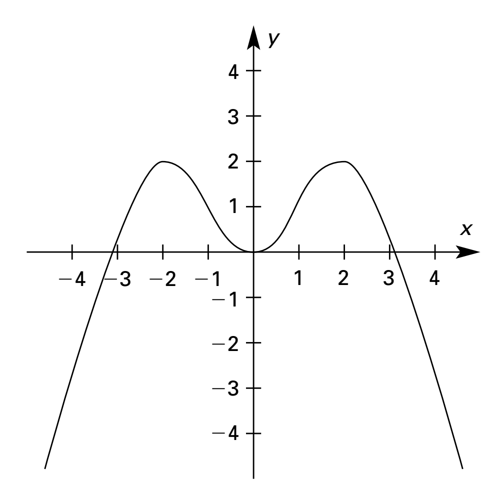
d) $y = \dfrac{1}{\sqrt{5 - x}}$, a partir de la gráfica de la función $y_1 = \sqrt{5 - x}$.

e) $y = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$, a partir de la gráfica de la función $y_1 = \sqrt{x^2 - 1}$.

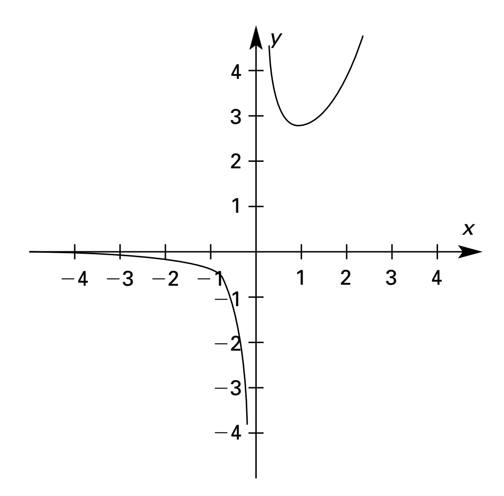
f) Considera rectángulos que tengan la misma área igual a 36 unidades cuadradas, dibuja los rectángulos a partir de la relación $xy = 36$, tomando valores de $x = 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18$, de manera que se puedan unir los vértices libres. ¿A qué gráfica responde el ejercicio?

8. Usa las destrezas expuestas para graficar la recíproca de una función e intenta construir las gráficas de las funciones $\dfrac{1}{f(x)}$ dadas las funciones $f(x)$ que se dan a continuación:

a) Gráfica de $f(x)$.



b) Gráfica de $f(x)$.



2.4. ARITMÉTICA DE LAS FUNCIONES

2.4.1. OPERACIONES CON FUNCIONES: SUMA, RESTA, PRODUCTO Y COCIENTE

Podemos afirmar que dos funciones *f* y *g* son iguales si, a través de operaciones algebraicas elementales, de una se llega a la otra y si ambas poseen el mismo campo de definición. Por ejemplo, en el caso de las funciones: $f(x) = |x|$ y $g(x) = \sqrt{x}$; en estas $\sqrt{x} = \pm x$, o bien $\sqrt{x} = |x|$. Además, cada una de ellas tiene por dominio todos los números reales $\mathbb{R}$. De esto último se desprende que $f(x) = g(x)$.

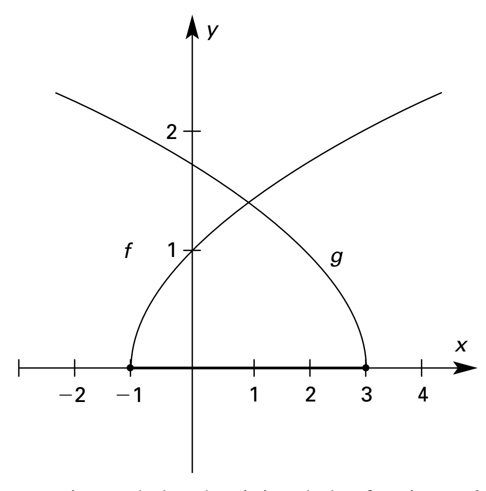


FIGURA 2.57. Intersecciones de los dominios de las funciones *f* y *g* del ejemplo 1.

La importancia de operar aritméticamente funciones: sumar, restar, multiplicar o dividir, se centra en cuidar el dominio que resulta de las propias operaciones. Si se cuenta con dos funciones cualesquiera f y g, como las que se aprecian en la gráfica de la Figura 2.57, por lo general el dominio de las operaciones citadas es la intersección de los dominios de ambas funciones. En el ejemplo que se cita, las funciones f y g son respectivamente $f(x) = \sqrt{x + 1}$ y $g(x) = \sqrt{3 - x}$.

EJEMPLO 1

En el caso anterior f tiene por dominio $x \geq -1$, mientras que para g este es $x \leq 3$, de manera que la intersección de ambos dominios se puede escribir como el intervalo $[-1, 3]$ tal como se muestra en el sombreado de la Figura 2.57.

Las operaciones suma, producto y cociente, de las funciones anteriores, se pueden expresar como:

a) $s(x) = f(x) + g(x) = \sqrt{x + 1} + \sqrt{3 - x}$, con D_{f+g}: $[-1, 3]$
b) $p(x) f(x) \cdot g(x) = \sqrt{x + 1}\sqrt{3 - x} = \sqrt{(x + 1)(3 - x)}$, con $D_{f \cdot g}$: $[-1, 3]$
c) $q(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\sqrt{x + 1}}{\sqrt{3 - x}}$, con $D_{\frac{f}{g}}$: $[-1, 3)$

Las operaciones entre funciones como la suma $f(x) + g(x)$, y el producto $f(x) \cdot g(x)$ también pueden escribirse como $(f + g)(x)$ y $(f \cdot g)(x)$, incluyendo al cociente, aunque en la práctica resulta más cómodo hacerlo como proponemos $s(x) = f(x) + g(x)$ y $p(x) = f(x) \cdot g(x)$.

La gráfica de las funciones que resultan de las operaciones $s(x)$, $p(x)$ y $q(x)$, del ejemplo anterior, se pueden limitar a las siguientes instrucciones:

1. Trazar las ordenadas para cada uno de los valores enteros, incluyendo las intersecciones de ambas gráficas, determinando además su valor numérico.
2. Para el caso de la suma, hay que *sumar* los valores numéricos de las ordenadas de cada gráfica, correspondientes a cada valor de x.
3. Unir los puntos resultantes cuidando la suavidad de la curva.
4. En los casos donde haya duda de la curvatura, se deben incluir más valores numéricos.

Funciones pares e impares

Para verificar si la función suma, resta, producto y cociente, son pares o impares, se pueden utilizar las siguientes propiedades que son consecuencia de las propias funciones elementales pares o impares:

a) El producto o cociente de dos funciones pares es par.
b) El producto o cociente de dos funciones impares es par.
c) El producto de una función impar y una función par es impar.

d) La suma o diferencia de dos funciones pares es par.
e) La suma o diferencia de dos funciones impares es impar.

El procedimiento para obtener la gráfica de la suma de ambas funciones aparece en las Figura 2.58 y 2.59.

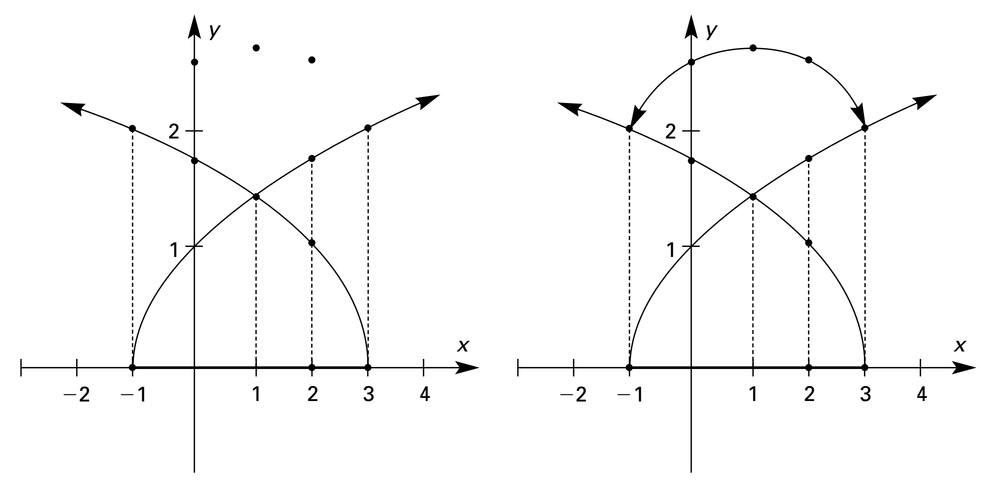


FIGURA 2.58. Suma de ordenadas de f y g. **FIGURA 2.59.** Gráfica de $s = f + g$.

Esta es una curva suave con D_{f+g}: $[-1, 3]$, tiene un máximo en $x = 1$. Su campo de variación se encuentra en el intervalo $2 \leq y \leq 2\sqrt{2}$; es creciente entre $x = -1$ y $x = 1$, decreciente entre $x = 1$ y $x = 3$. Cuenta con cotas superior e inferior en $y \geq 2$ e $y \leq 2\sqrt{2}$. La función no es ni par ni impar, aún cuando es simétrica en $x = 1$.

Para el caso del producto, hay que *multiplicar* las ordenadas de de ambas gráficas, correspondientes a cada valor de x, e ir colocando los puntos resultantes.

La gráfica del producto, Figura 2.65: $p(x) = f(x) \cdot g(x) = \sqrt{x + 1}\sqrt{3 - x}$, se asemeja a una parábola invertida, tiene por dominio el intervalo, su campo de variación se encuentra entre $0 \leq y \leq 2$, en $y = 0$ e $y = 2$ cuenta con cotas inferior y superior, respectivamente. La función crece entre $x = -1$ y $x = 1$, decrece entre $x = 1$ y $x = 3$, toma un valor máximo en $x = 1$. La función no es ni par ni impar.

Para la función cociente, Figura 2.61, habrá que realizar la división entre las ordenadas de cada gráfica $\dfrac{f}{g}$. En este caso x no puede tomar el valor de 3, lo cual significa que en ese valor la gráfica de la función es asintótica*, creciendo sin límite al infinito. $\dfrac{f}{g}$, no es ni par ni impar.

---

* Actualmente es muy común hacer uso del cociente de dos cantidades, o funciones, como es el caso del peso y talla de una persona en la forma $\dfrac{\text{peso}}{\text{talla}}$. El valor numérico de ese cociente ha sido llamado *índice de masa corporal* IMC, lo cual indica si la persona está baja de peso, en su peso o con sobre peso, según los intervalos correspondientes: IMC $<$ 19 peso bajo, 19 $<$ IMC $<$ 28, en su peso, e IMC $>$ 28, sobrepeso.

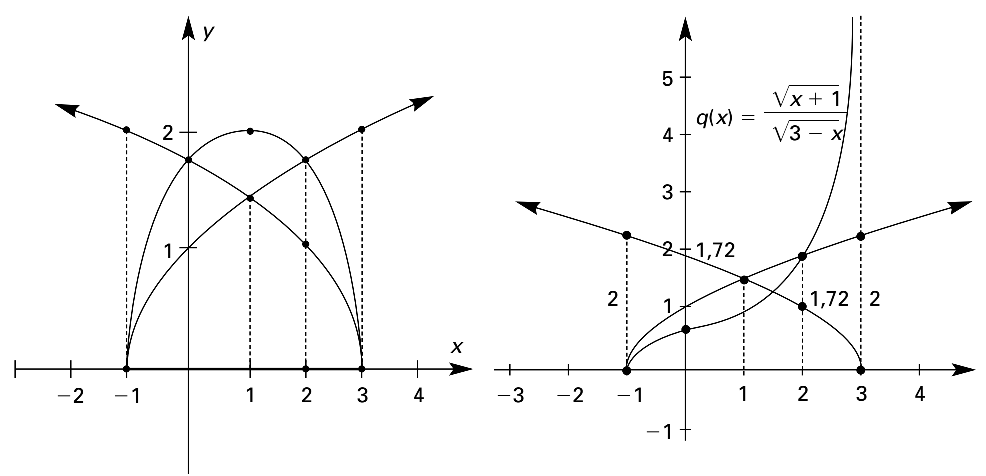


FIGURA 2.60. Gráfica de $p(x) = f(x) \cdot g(x)$. **FIGURA 2.61.** Gráfica de $q(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$.

La función $q(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{3-x}}$, tiene por dominio el intervalo $D_{\frac{f}{g}} : [-1, 3)$, su campo de variación se encuentra en $0 \leq y < \infty$, tiene una cota inferior en $y \geq 0$, aparece una torcedura en $x = 0$ y crece en todo su dominio.

EJEMPLO 2

Haciendo uso de la Tabla 2.1, de temperaturas T y presiones p diseñada por Humboldt, colocada en 2.2.5 (esta es reproducida de nuevo en el ejemplo 2 del siguiente parágrafo) hágase las operaciones suma: $s(h) = T(h) + p(h)$, producto: $r(h) = T(h) \cdot p(h)$ y cociente: $q(h) = \dfrac{T(h)}{p(h)}$, intentando dar un significado de cada una de ellas. (Aplíquese en todos los casos un valor para h de 3.500 metros SNMM).

SOLUCIÓN:

1. $s(3.500) = T(3.500) + p(3.500)$
   $s(3.500) = 9{,}0\ °C + 0{,}50418$ m

   La suma $s(h) = T(h) + p(h)$, establece que para una altura h SNMM, esta tiene una temperatura $T(h)$ asociada con una presión $p(h)$.
2. $r(h) = T(h) \cdot p(h)$
   $r(3.500) = T(3.500)p(3.500)$
   $r(3.500) = (9{,}0\ °\text{C})(0{,}50418\ \text{m})$
   $r(3.500) = 4{,}5126\ °\text{C m}$

   El producto, $r(h) = T(h) \cdot p(h)$, forma parte de los argumentos de cálculo que permiten determinar el decrecimiento de la humedad en el aire a partir de las elevaciones SNMM, la temperatura T y la presión atmosférica p.

3. El cociente $q(h) = \dfrac{T(h)}{p(h)}$, solamente toma sentido si se opera entre dos cantidades vecinas una de la otra dejando fija la diferencia de alturas SNMM inicial, por ejemplo:

$$q(h_2 - h_1) = \frac{T_2(h_2) - T_1(h_1)}{p_2(h_2) - p_1(h_1)}$$

De esta forma:

$$q(4.000 - 3.500) = \frac{T_2(4.000) - T_1(3.500)}{p_2(4.000) - p_1(3.500)} = \frac{6{,}4 - 9{,}0}{0{,}47417 - 0{,}50418}$$

$$q(4.000 - 3.500) = \frac{2{,}6}{0{,}03001}.$$

Esta última cantidad indica la proporción en que cambia la temperatura y la presión atmosférica conforme se pasa de una altura SNM h_1 a otra h_2, es decir, en 500 metros de desnivel.
Si ahora determinamos la proporción que existe entre los 4.000 y 4.500 metros SNM, obtendremos una proporción semejante a la anterior:

$$q(4.500 - 4.000) = \frac{T_2(4.500) - T_1(4.000)}{p_2(4.500) - p_1(4.000)} = \frac{3{,}7 - 6{,}4}{0{,}44553 - 0{,}47417}$$

$$q(4.500 - 4.000) = \frac{2{,}7}{0{,}02864}$$

Esto último deja ver cómo el cambio de desnivel guarda, con ligeras variaciones, la proporción entre las cantidades involucradas.

EJEMPLO 3

Dadas las funciones $f(x) = x$ y su recíproca $g(x) = \dfrac{1}{x}$, determine la operación suma $s(x)$, obtenga su dominio y bosqueje la gráfica correspondiente.

SOLUCIÓN:

$s(x) = x + \dfrac{1}{x}$, con dominio en todos los reales $\mathbb{R}$ a excepción de $x = 0$.

El proceso de graficación se puede ver en el bosquejo de la Figura 2.62, en el que la suma de los segmentos de ordenadas de cada función es representada por los puntos que ahí aparecen.

La sucesión de puntos tienen por asíntota a la recta a 45° (en este caso se le llama asíntota oblicua estas se definen en la sección 3.7.3) en los intervalos $(-\infty, -1)$ y $(1, \infty)$, en los que, incluso, la función crece. Entre $(-1, 0)$ y $(0, 1)$ la función decrece y los puntos toman por asíntota a la curva de la función $g(x) = \dfrac{1}{x}$.

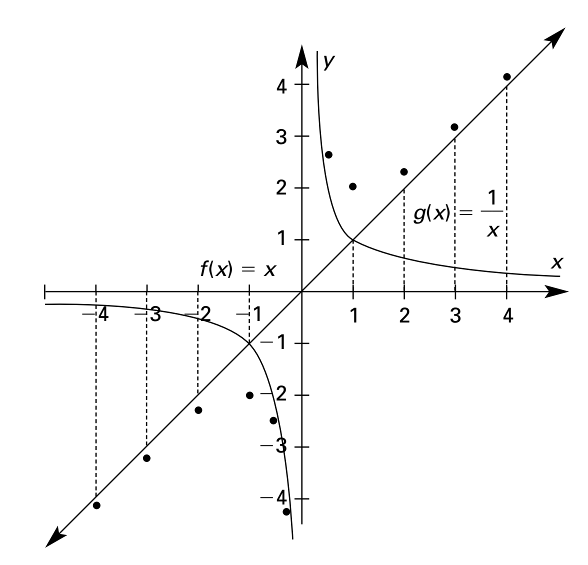


FIGURA 2.62. Proceso de graficación para la suma $S(x) = x + \dfrac{1}{x}$.

La función $s(x)$ tiene un máximo en $x = -1$ y un mínimo en $x = 1$, los cuales le sirven de cotas siendo estas últimas: $y \leq -2$ e $y \geq 2$. Véase la Figura 2.63.

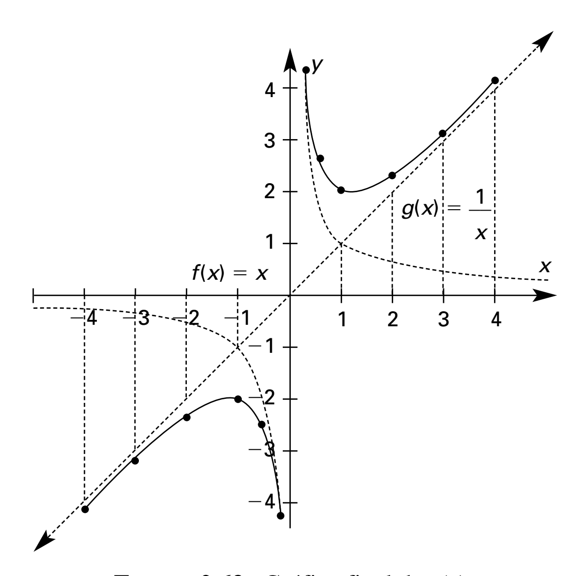


FIGURA 2.63. Gráfica final de $s(x)$.

2.4.2. COMPOSICIÓN DE FUNCIONES

A partir de combinar aritméticamente dos o más funciones, como se vio anteriormente, existe otro tipo de operación entre funciones llamado *composición* poco conocida en el álgebra de preparatoria. La idea sobre la que descansa la composición de

funciones es un estilo de *encadenamiento* mediante el cual una cantidad es aplicada para operar sobre otra. Para entender mejor esto último, es necesario verlo con un ejemplo.

EJEMPLO 1

Por un viaje en avión *clase turista* sencillo, de la Ciudad de México a cualquier destino del país, se cobra una cantidad en pesos que está en función del tiempo que el avión tarda en llegar al destino elegido, y la cantidad en pesos que se debe pagar de impuestos en la compra del boleto, está en función de la cantidad inicial que se paga por el destino. Luego la cantidad en impuestos está en función del tiempo que tarda el avión al destino elegido.

Ilustremos esto último con un caso particular. Supongamos que una persona viaja en vuelo directo de la Ciudad de México a Tijuana, destino al que el avión tarda 2,5 horas. Sea $f(t) = 1.000t$ la función con la que se cobra el costo del boleto, y $g(x) = \frac{1}{4}(x - 1.000)$ la función mediante la cual se cobra el impuesto. Para determinar el costo del boleto incluyendo el impuesto, tendríamos que determinar primero el costo del boleto haciendo $f(2{,}5) = 2{,}5(1.000) = 2.500$ pesos, luego *aplicaríamos* esta cantidad encadenándole en $g(x)$ como $g(2.500) = \frac{1}{4}(2.500 - 1.000) = 375$ pesos, impuesto que corresponde a las dos horas y media de vuelo.

Usemos las funciones f y g anteriores y encontremos una fórmula $g(f(t))$ para el proceso de determinar el impuesto. Si $f(t) = 1.000t$ y $g(x) = \frac{1}{4}(x - 1.000)$, si hacemos: $g(f(t)) = \frac{1}{4}(f(t) - 1.000) = \frac{1}{4}(1.000t - 1.000)$.

O bien: $g(f(t)) = 250t - 250$, la cual es una función expresada en términos de t.

EJEMPLO 2

Haciendo uso de la Tabla 2.1, de temperaturas T y presiones p diseñada por Humboldt, colocada en 2.2.5, se muestra enseguida (página siguiente), hágase los encadenamientos siguientes:

a) $h \to T(h) \to p(t(h))$ para una altura h de 2.000 SNMM.
b) $h \to p(h) \to T(p(h))$ para una altura h de 2.000 SNMM.

SOLUCIÓN:

Los resultados del encadenamiento son:
a) $h = 2.000 \to T(h) = 20\ °C \to p(T(h)) = 0{,}60501$
b) $h = 2.000 \to p(h) = 0{,}60501 \to T(p(h)) = 20\ °C$

Alturas h SNMM en metros	**Temperatura T promedio en grados centígrados**	**Presión p barométrica en cm**
0	+25,5	0,76202
500	24,0	0,71961
1.000	22,6	0,67923
1.500	21,2	0,64134
2.000	20,0	0,60501
2.500	18,7	0,57073
3.000	14,4	0,53689
3.500	9,0	0,50418
4.000	6,4	0,47417
4.500	3,7	0,44553
5.000	0,4	0,41823
5.500	−3,0	0,39206
6.000	−6,0	0,36747
6.500	−10,0	0,34357
7.000	−13,0	0,32035
7.500	−16,0	0,30068

Obsérvese las siguientes consideraciones:

1. $p(T(h)) \neq T(p(h))$
2. En el primer caso inciso a): h es dominio y $T(h)$ contradominio, al encadenarse $T(h)$ es dominio y $p(T(h))$ contradominio.
3. En el segundo caso inciso b): h es dominio y $p(h)$ contradominio, al encadenarse, $p(h)$ es dominio y $T(p(h))$ contradominio.

De los ejemplos se desprende la siguiente definición:

Dadas dos funciones $\mathrm{f(x)}$ *y* $\mathrm{g(x)}$*, la operación* $\mathrm{f \circ g = f(g(x))}$*, es llamada función composición. El dominio de* $\mathrm{f \circ g}$ *son todos los valores de* x *correspondientes al dominio de* g*, en tanto que* $\mathrm{g(x)}$ *está en el dominio de* $\mathrm{f(g(x))}$*.*

[2-13]

EJEMPLO 3

La función $c(x) = \sqrt{1 - x^2}$, es una función compuesta de dos funciones f y g. ¿Cuáles son estas?

SOLUCIÓN:

$c(x)$ es de la forma $c(x) = f(g(x))$, en la que $g(x)$ está aplicada o evaluada en $f(x)$. Podemos proponer g como $g(x) = 1 - x^2$, en tanto f sería de la forma $f(x) = \sqrt{x}$. La composición de funciones es válida si:

$$f(g(x)) = f(1 - x^2) = \sqrt{(1 - x^2)} = \sqrt{1 - x^2}$$

Luego: $c(x) = \sqrt{1 - x^2}$

EJEMPLO 4

Sea f definida por $f(x) = \sqrt{1 - x}$, cuyo dominio se coloca en $x \leq 1$ y g por $g(x) = x^2$, con dominio en todos los reales $\mathbb{R}$. Encontremos $f \circ g$ y $g \circ f$.

SOLUCIÓN:

$$f \circ g = f(g(x)) = f(x^2) = \sqrt{1 - x^2}$$

Donde el dominio de $f \circ g$ se encuentra en $-1 \leq x \leq 1$:

$$g \circ f = g(f(x)) = g(\sqrt{1 - x}) = (\sqrt{1 - x})^2 = |1 - x|$$

Siendo el dominio de $g \circ f$ los valores de x tales que $x \leq 1$.

EJEMPLO 5

Construyamos la gráfica de $f \circ g = \sqrt{1 - x^2}$ del ejemplo anterior. Diseñamos primero las gráficas de cada una de las funciones f y g restringiéndoles a solamente el dominio de la función composición $f \circ g$, en este caso entre los valores: $-1 \leq x \leq 1$, incluyendo la gráfica de la función identidad $y = x$ (véase Figura 2.64).

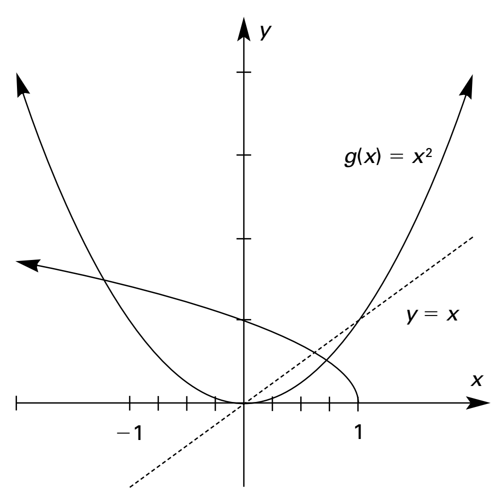


FIGURA 2.64. Proceso de graficación para $f \circ g$.

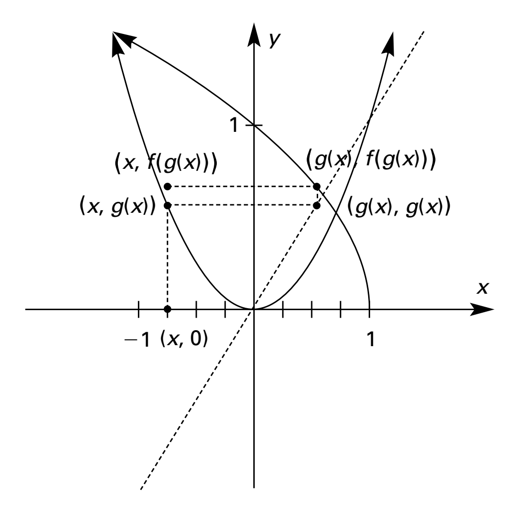


FIGURA 2.65. Proceso de graficación para $f \circ g$.

Enseguida *seccionamos* con segmentos de recta el dominio de la función $f \circ g$ que deseamos construir, en la gráfica de la Figura 2.70 los segmentos se encuentran a una distancia de 0,25 unidades uno del otro. No obstante, conviene colocar segmentos en las intersecciones de las funciones f y g, en este caso solamente aparece una, en el primer cuadrante, en el dominio de $f \circ g$, así como también en otras singularidades de ambas funciones.

Los pasos a seguir para ir encontrando los puntos que configuran la función buscada son los siguientes:

a) Iniciar el proceso de graficación de izquierda a derecha o derecha izquierda, no importa el orden, en uno de los segmentos de los extremos. Para mejorar la ex-

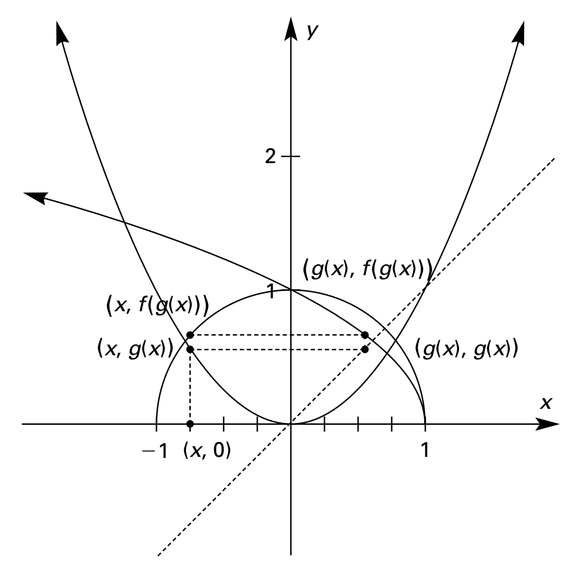


FIGURA 2.66. Gráfica final de $f \circ g$.

plicación, en este caso iniciaremos en el punto $(x, 0) = (-0{,}75, 0)$, aún cuando no sea el extremo.

b) *Subimos* desde este segmento hasta la gráfica de la función g trazando la ordenada correspondiente. Hasta aquí nos habremos colocado en el punto $(x, g(x)) = (-0{,}75, 0{,}5625)$.

c) Enseguida trazamos, desde este último punto, una recta horizontal paralela al eje de las x hasta hacerla coincidir con la recta a 45°. Con ello nos habremos colocado en el punto $(g(x), g(x)) = (0{,}5625, 0{,}5625)$. El proceso que hemos seguido se puede ver en la gráfica de la Figura 2.70.

d) El siguiente paso consiste en *subir* con una vertical, desde este último punto, hasta la gráfica de la función f, cuyo proceso nos lleva al punto $(g(x), f(g(x))) =$ $= (0{,}5625, f(0{,}625)) = (0{,}5625, 0{,}6614)$.

e) Finalmente, trazamos una recta horizontal hasta la altura del punto inicial $(x, 0)$, con lo cual estaremos sobre un punto de coordenadas $(x, f(g(x))) = (-0{,}75, 0{,}6614)$, el cual corresponde a la gráfica de la composición $f \circ g$.

Continuando con el procedimiento, para cada uno de los segmentos trazados sobre el eje x, se obtiene la gráfica de la función buscada, en este caso el semicírculo que se presenta en la Figura 2.66 (página anterior).

2.4.3. FUNCIONES INVERSAS

Hasta ahora hemos visto cómo el eje y, y el origen, sirven de referencia a la simetría de las funciones elementales, como las que se muestran en la Figura 2.67.

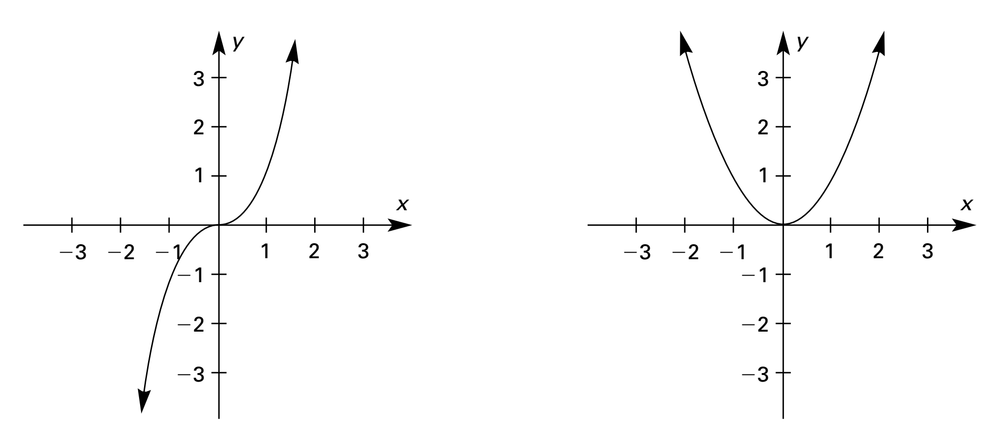


FIGURA 2.67. Izquierda: función impar, simétrica respecto al origen. Derecha: función par, simétrica respecto al eje y.

Una característica importante de las funciones simétricas es que sus abscisas son iguales en magnitud respecto al origen. Observa esto último en la gráfica de la Figura 2.68. Por su lado, la gráfica de la Figura 2.69, deja ver que las magnitudes de las abscisas no cambian aún cuando la gráfica haya sido *rotada*. Sin embargo, la posición que toman estas últimas les quita esa denominación, es decir, dejan de ser abscisas.

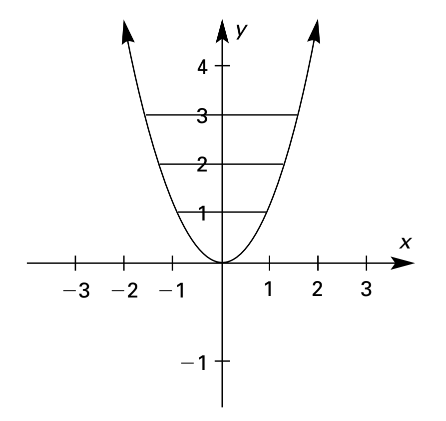


FIGURA 2.68. Las abscisas en una función simétrica son iguales, en valor absoluto, con respecto al origen. Estas abscisas son, además, perpendiculares al eje *y*.

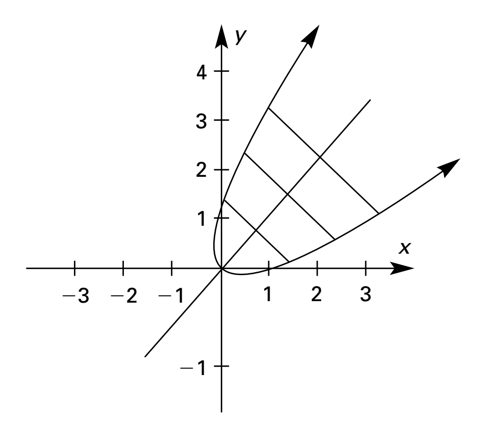


FIGURA 2.69. Las magnitudes de las abscisas no cambian al rotarse la función simétrica.

No obstante, la simetría puede aparecer en ejes de referencia distintos a los conocidos *X* e *Y*, en tanto que las magnitudes entre las abscisas de cada función permanecen invariantes, lo cual significa que no cambian. Ejemplos que caracterizan esto último, se pueden lograr tomando como referencia a la recta a 45°. La construcción gráfica de una función simétrica respecto a la bisectriz, se obtiene haciendo girar el dibujo de la función inicial un ángulo de 180° respecto a ésta última, o bien reflejándola sobre la propia bisectriz, sirviendo esta última de *espejo*. Esto lleva a reconocer la manera en que cambian algunos de los elementos de la figura al ser reflejada.

Intentemos construir una función simétrica respecto a la recta a 45°, a partir de la función elemental $y = x^2$, ello nos permitirá conocer nuevas funciones y nuevas propiedades de las mismas.

Las gráficas correspondientes a la función $y = x^2$ y la recta a 45°, se presentan en la Figura 2.70. Como puedes ver, ambas se intersecan o bien son iguales en $x = 0$ y

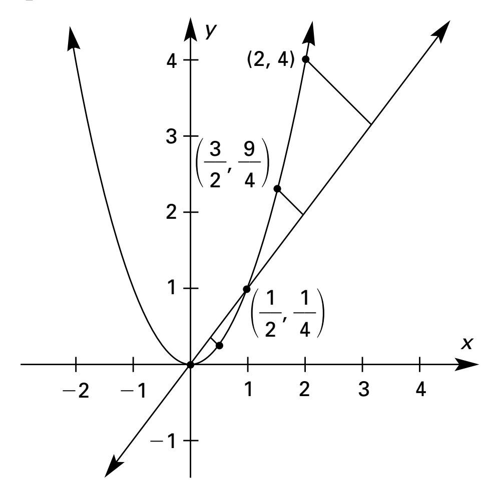


FIGURA 2.70. Para determinar la gráfica de la inversa de $y = x^2$ se eligieron algunos valores de las abscisas *x* calculando sus respectivas ordenadas y, como aparece en la gráfica.

$x = 1$. Para determinar una función simétrica a partir de ellas, hemos elegido solamente la parte derecha de la parábola $y = x^2$, la razón de no tomar la parte izquierda, tiene que ver con el dominio de la función simétrica que buscamos, y será una cuestión que habremos de aclarar más adelante.

Elegimos además algunas coordenadas de la función $y = x^2$, como son (0, 0), $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$, (1, 1), $\left(\frac{3}{2}, \frac{9}{4}\right)$ y (2, 4) las cuales representan de manera general a la gráfica (véase la Figura 2.70).

Los segmentos que deseamos reproducir para encontrar las coordenadas de la función simétrica aparecen dirigidos desde cada uno de los puntos que elegimos a la recta a 45°; estos últimos segmentos son a su vez perpendiculares a la propia recta. Su prolongación en magnitud aparece en la gráfica de la Figura 2.71, colocamos aquí mismo las coordenadas de los puntos donde los segmentos terminan.

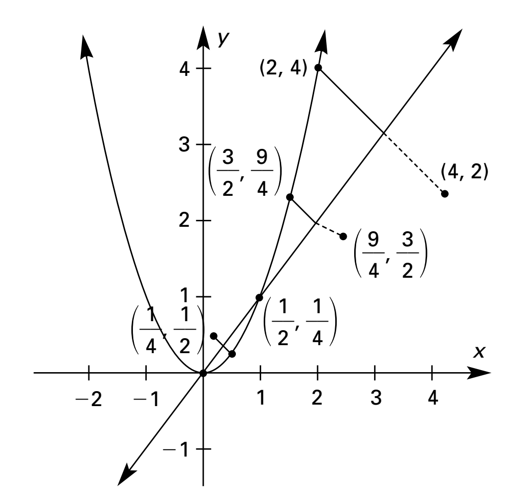


FIGURA 2.71. Trazos para la deferminación gráfica de la inversa de $y = x^2$.

Una primera observación es que las coordenadas donde los segmentos terminan son simétricas una respecto a la otra, la x de una se convierte en la y de la otra y viceversa, intercambiándose como consecuencia los campos de definición y variación entre ambas.

De hecho, las coordenadas de una función inversa $f^{-1}(x)$ se obtienen intercambiando las coordenadas de la función primitiva $f(x)$ a través de la recta a 45º. La recta sobre la que se *reflejan* las coordenadas (a, b) y (b, a), en la Figura 2.73, perpendicular a esta última, es llamada *bisector*.

Por su lado, la raíz de cada abscisa es la correspondiente ordenada. Más esto último no lo hemos adivinado, lo calculamos *jugando* con las coordenadas involucradas de la función cuadrática y la recta a 45°. Es sencillo, y se procede de la siguiente manera:

a) Forma el triángulo rectángulo comprendido entre las coordenadas simétricas de cada una de las gráficas; por ejemplo, si desde el punto (2, 4) que corres-

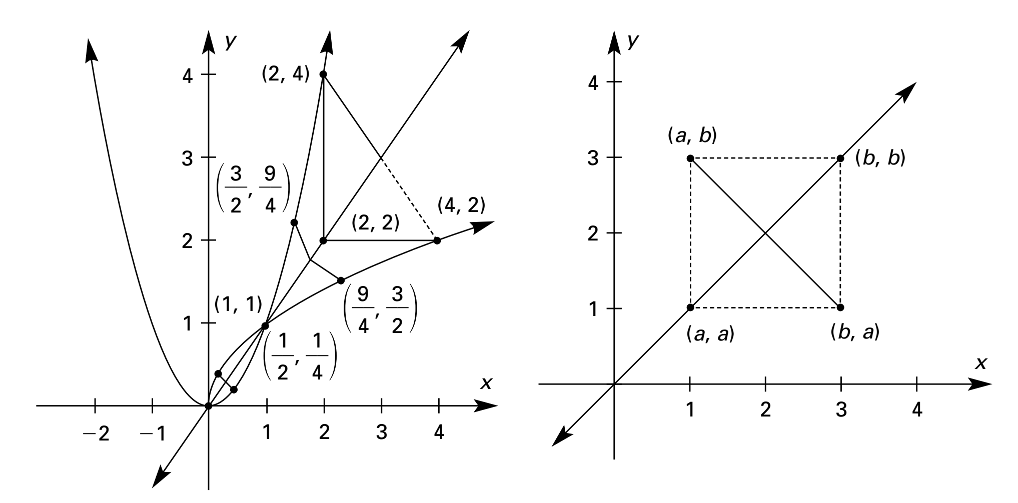


FIGURA 2.72. Gráfica de la inversa de $y = x^2$.

FIGURA 2.73. El bisector $y = x$ preserva la reflexión de coordenadas.

ponde a $y = x^2$, bajamos una recta paralela al eje y que interseque con la recta a 45°, esta lo hará en el punto (2, 2). Verifícalo (véase la Figura 2.72).

b) Ahora traza desde este punto una recta horizontal de la misma magnitud que la anterior; ¿cuál es esa magnitud que te llevará hasta el punto desconocido que corresponde a la gráfica de la función simétrica buscada? Naturalmente, habrás llegado al punto de coordenadas (4, 2), el cual es simétrico al punto (2, 4), y corresponde a la función simétrica buscada.

Con estos elementos ya habrás corroborado que la gráfica de la función simétrica que hemos construido, a partir de $y = x^2$, reflejándola sobre la recta a 45°, es la función $y = \sqrt{x}$, construida en la sección 2.3.4.7, esta se encuentra en la Figura 2.72.

El proceso de construcción anterior solo es posible entre funciones *inversas* una respecto de la otra; de hecho, ambas funciones del ejemplo lo son. Esta idea es fundamental para construir la gráfica de toda función inversa, y nos servirá más adelante para establecer la gráfica y definición de la función logaritmo, y aquellas de las funciones trigonométricas inversas.

Otras propiedades importantes de las funciones inversas, que se desprenden de las actividades anteriores, se presentan enseguida.

Como podrás observar, solamente reflejamos sobre la recta a 45° la parte de la parábola $y = x^2$ que corresponde al primer cuadrante, dejando la que corresponde al segundo cuadrante fuera de la reflexión.

En realidad la función inversa de $y = x^2$ es una función *biforme* que adopta ambas ramas $y = \pm\sqrt{x}$. Véase la Figura 2.75.

Una característica de la función $y = x^2$, es que para dos valores distintos de x, como por ejemplo $x = 1$ y $x = -1$, los valores correspondientes de y son $y = 1$, en ambos casos (véase la Figura 2.76). En consecuencia, ocurrirá que su inversa sea una ecuación, o bien que dicha función no tenga inversa y sea necesario discriminar su dominio a efecto de graficar de ella su propia inversa. Luego, una primer condición para que una función f tenga inversa, es que para dos valores dados de x, ambos posean diferentes valores de y. Esta propiedad de las funciones se conoce como uno a uno.

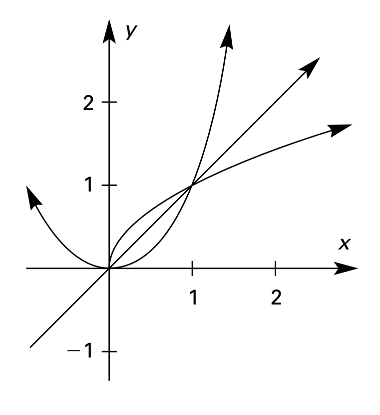


FIGURA 2.74. $y = x^2$ e $y = \sqrt{x}$ son funciones inversas.

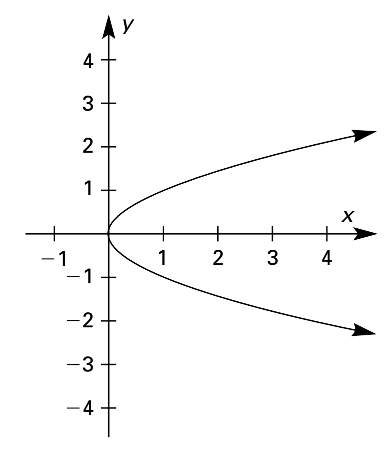


FIGURA 2.75. Gráfica de $y = \pm\sqrt{x}$.

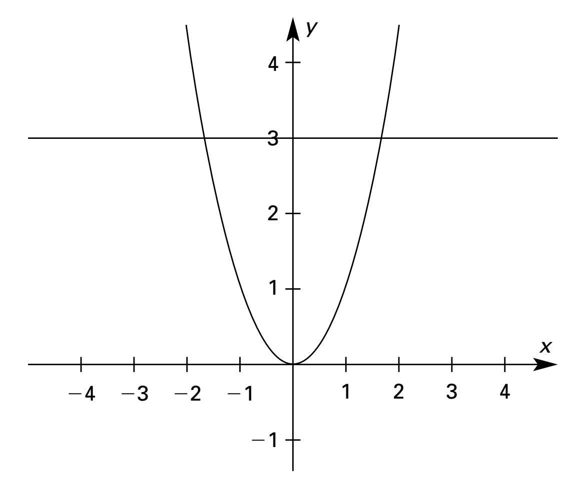


FIGURA 2.76. La función $y = x^2$ no es uno a uno.

De aquí que:

Para que una función f *tenga inversa, es necesario que para dos valores dados de* x*, ambos posean diferentes valores de* y*. Esta propiedad de las funciones se conoce como «uno a uno».*

[2-14]

Es fácil identificar una función que no es *uno a uno*, como sucede con la función $y = x^2$. Si trazamos una recta horizontal paralela al eje x, sin que toque un máximo o mínimo, ello deja ver cómo corta un mismo valor de las ordenadas para dos valores distintos de x; si ello ocurre, la función no es *uno a uno* y, además, no tiene inversa, salvo que, como ya se mencionó, se discrimina una de las partes.

Algebraicamente podemos determinar la ecuación de la función inversa despejando x de la función conocida, lo cual no siempre es sencillo; esto es diferente para la construcción de la gráfica. Por ejemplo, en $y = x^2$ nos quedará, al sacar raíz cuadrada y despejar, que $x = \sqrt{y}$ y, dado que los campos de definición y variación se encuentran cambiados, los de definición y variación de $y = x^2$ lo son ahora de $x = \sqrt{y}$, y viceversa. A partir de esta aclaración, podemos *renombrar* la inversa $x = \sqrt{y}$ con la siguiente notación: $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$. En la que f^{-1} se lee como *función inversa de f.*

Hay que tener cuidado y no confundirse con la notación f^{-1}, esta última tiene esa definición, y no es posible cambiarla por $\frac{1}{f}$, cuyo significado es el de la función recíproca.

Las propiedades ya mencionadas, son válidas para valores de los campos de definición y variación de una función $f(x)$, en las que los valores de su inversa se cambian, es decir: Si f: $(a_1, b_1) \to f^{-1}(b_1, a_1)$.

Finalmente, si hacemos la composición de f con su inversa f^{-1}, o sea: $f \circ f^{-1} = f(f^{-1}(x))$, resultará que $f(f^{-1}(x)) = x$. Es decir, la composición de dos funciones inversas es igual a la función identidad, lo cual ya se dejaba ver. Por ejemplo, para $f(x) = x^2$ y $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$, la composición de ambas da por resultado:

$$f(f^{-1}(x)) = f(\sqrt{x}) = (\sqrt{x})^2 = x$$

Siendo cierta también la propiedad conmutativa de la composición, es decir $f^{-1} \circ f = x$.

De esto último se desprende la siguiente definición:

Se dice que una función f *tiene por inversa a la función* f^{-1}*, si la función* f *es uno a uno, la composición de ambas tiene por resultado a la función identidad* $f(f^{-1}(x)) = x$*, y los campos de definición y variación de* f *lo son en sentido contrario para* f^{-1}.

[2-15]

ACTIVIDADES Y EJERCICIOS DE LAS SECCIONES 2.4 A 2.4.3

1. Dadas las funciones $f(x) = \sqrt{4 - x}$ y $g(x) = x^2$, encuentre:

a) $f + g, f - g, f \cdot g, \frac{f}{g}, f(g(x))$ y $g(f(x))$

b) Los dominios de $f + g, f - g, f \cdot g, \frac{f}{g}, f(g(x))$ y $g(f(x))$

c) $f(g(0)$

d) $g(f(0))$

e) $f(g(-4))$

f) $g(f(-4))$

g) $f(g(4))$

h) $g(f(4))$

2. Dados los siguientes pares de funciones, encuentre en cada caso las composiciones $f \circ g$ y $g \circ f$, especificando en sus dominios.

a) $f(x) = 3x - 1,\ g(x) = x^2 - 1$

b) $f(x) = x^2 - 4,\ g(x) = x + 2$

c) $f(x) = \dfrac{1}{x+1},\ g(x) = \dfrac{1}{2 - x^2}$

d) $f(x) = x^2 - \dfrac{2}{x},\ g(x) = \sqrt{x - 2}$

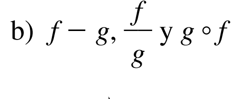
e) $f(x) = 2x^2 - 1,\ g(x) = \sqrt{x + 1}$

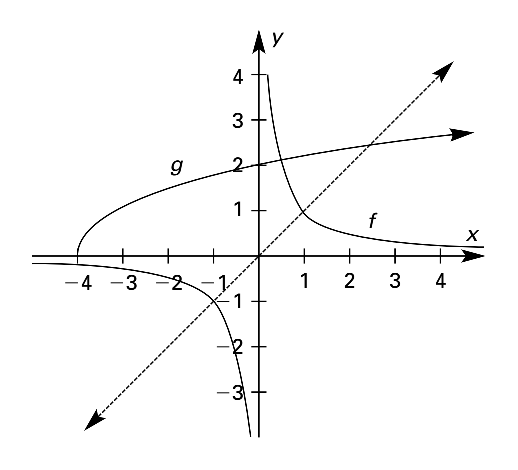
f) $f(x) = 5,\ g(x) = 5x^2 - 1$

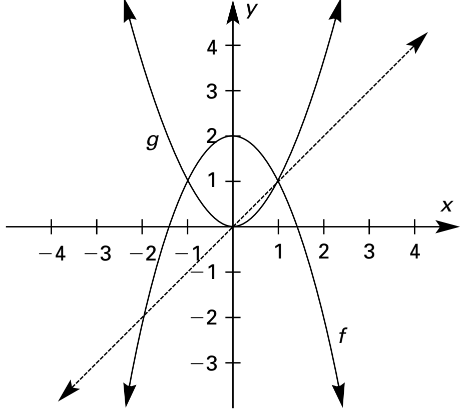
g) $f(x) = x,\ g(x) = \sqrt{x - 5}$

3. Dadas las siguientes gráficas de f y g, incluida la recta a 45°, encuentre la gráfica de las operaciones que se piden en cada caso:

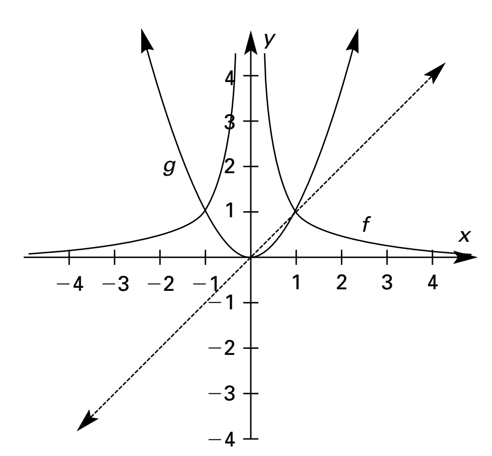
a) $f + g, f \cdot g$ y $f \circ g$


b) $f - g, \dfrac{f}{g}$ y $g \circ f$

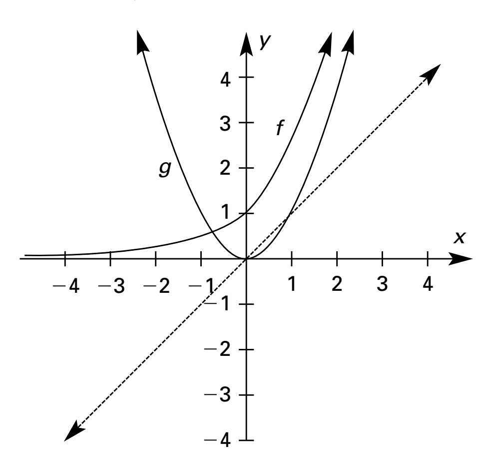




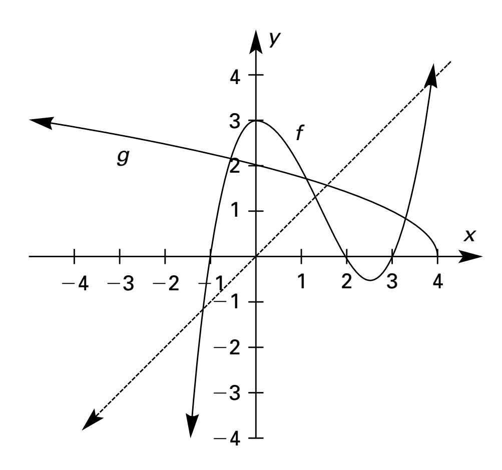

c) $f \circ g$ y $g \circ f$



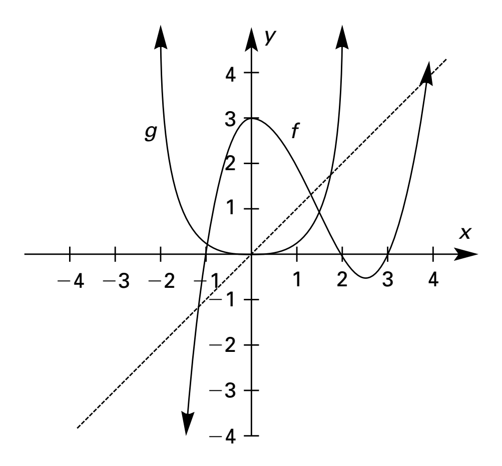
d) $f \circ g$ y $g \circ f$



e) $f \circ g$



f) $g \circ f$



4. Escribir las siguientes funciones compuestas en forma de encadenamientos de manera que cada función elemental sea un *eslabón*.

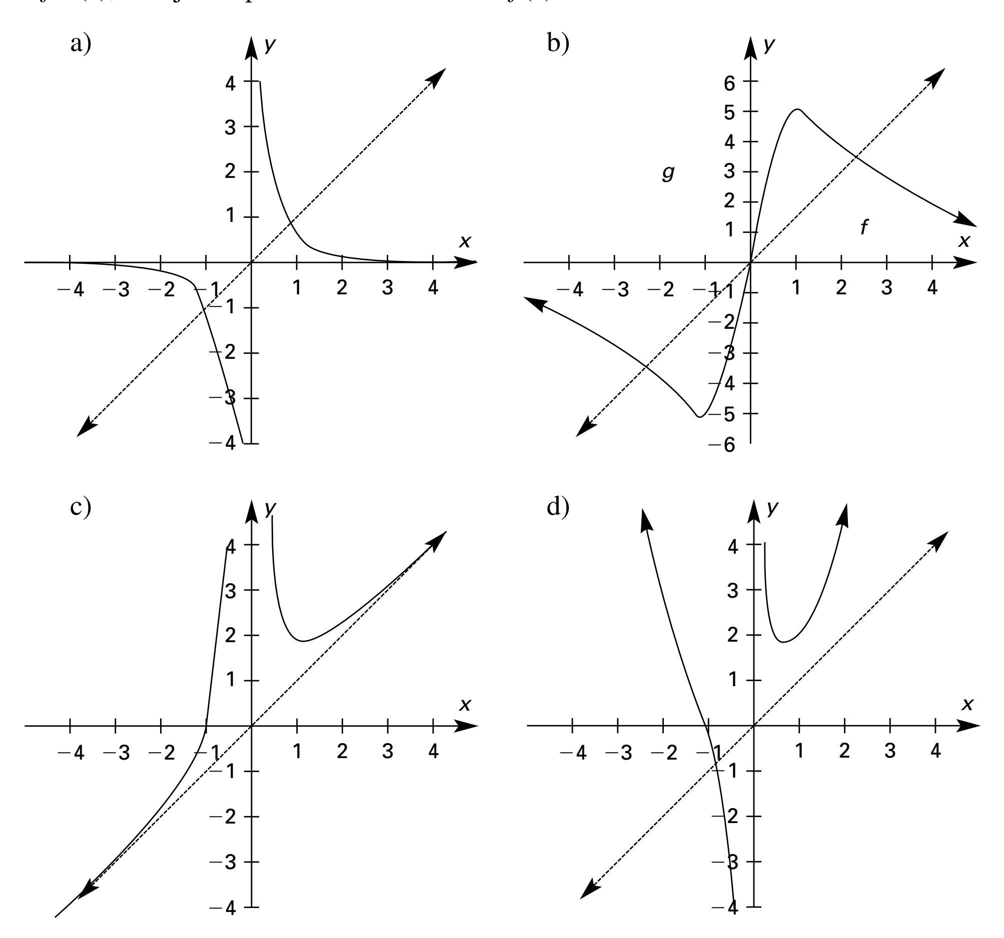
a) $y = (3x - 1)^{11}$
b) $y = 3^{\operatorname{sen} x}$
c) $y = \sqrt{(x - 3)^3}$
d) $y = 5^{x-1}$

5. Hallar la inversa $f^{-1}(x)$ de las siguientes funciones $y = f(x)$, si:

a) $y = 2x + 3$
b) $y = 3x^2 - 1$
c) $y = \sqrt[3]{1 - x^3}$

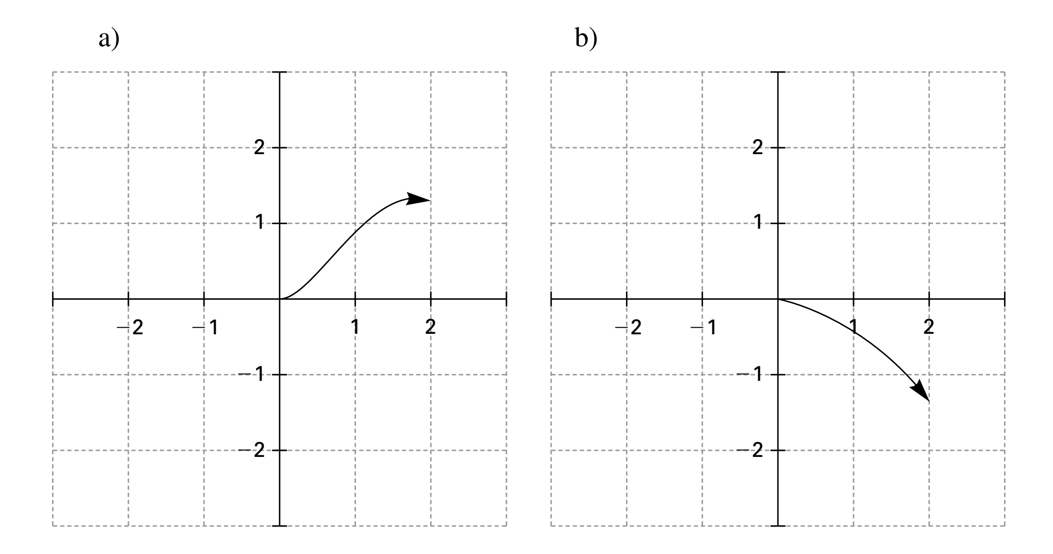
d) Encuentre los campos de definición de las funciones inversas calculadas anteriormente.

6. Dadas las siguientes gráficas de $f(x)$, encuentre las gráficas que corresponden a $f^{-1}(x)$, reflejando puntos coordenados de $f(x)$ a través de la recta a 45°.



7. Las siguientes figuras muestran parte de las gráficas de funciones cuyo dominio son todos los reales. Completa el trazo considerando que:

1. f es par
2. f es impar.
3. f es uno a uno.
4. f es simétrica.



2.5. GRÁFICA DE FUNCIONES TRASCENDENTES

2.5.1. FUNCIONES ESCALONADAS

La gráfica de una función trascendente, como la que utilizamos anteriormente para distinguir el gasto de energía eléctrica de una casa-habitación, dada por:

$$y = \begin{cases} 20 & \text{para } 0 \leq x \leq 5 \\ 20 + 0{,}3(x - 5) & \text{para } 5 \leq x \leq 8 \\ 20{,}9 & \text{para } 8 \leq x \leq 17 \\ 20{,}9 + 0{,}4(x - 17) & \text{para } 17 \leq x \leq 24 \end{cases}$$

y cuyo campo de definición son los valores del tiempo comprendidos entre $0 \leq x \leq 24$ (por comodidad hicimos $x = t$), es representada en la Figura 2.81 por cua-

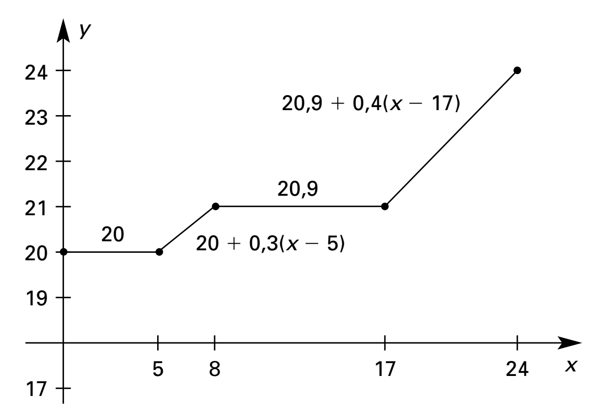


FIGURA 2.77. Gráfica de la función escalonada del gasto de energía eléctrica para una casa-habitación.

tro líneas rectas unidas continuamente, es decir, no están *despegadas* una de la otra, y tiene por campo de variación los valores comprendidos en el intervalo $20 \leq y \leq 23{,}7$. La función es acotada inferiormente en $y \geq 20$ y cuenta con una cota superior en $y \leq 23{,}7$.

Esta última tiene un mínimo en $x = 20$ y un máximo en $x = 23{,}7$, es una quebrada que tiene dos tramos de rectas horizontales y otros dos en sentido ascendente; es creciente en el intervalo $0 \leq x \leq 24$.

2.5.2. GRÁFICAS DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

La parte fundamental de la variación de las funciones trigonométricas ocurre a través de la variación angular de problemas que incorporan movimiento.

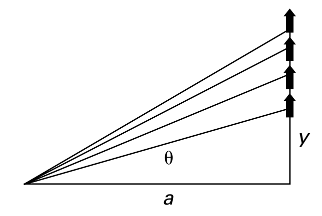


FIGURA 2.78. El ángulo θ es variable.

En el ejemplo del triángulo que se presenta en la Figura 2.78, las diferentes posiciones que este asume hacen que ángulo θ adquiera a su vez movimiento. En la práctica, esta variación solo se entiende al disociar al ángulo de su carácter constante y concebirle como una variable $x = \theta$. La caracterización del ángulo como variable llevó a los matemáticos a la necesidad de unir los sistemas sexagesimal con el centesimal a través de la definición del *radián* como, 1 radián $= \dfrac{180°}{\pi}$, o bien $180° = 3{,}14159\ldots$, y equiparar estos últimos con los números reales.

Para el estudio de la variación angular, y otros fenómenos asociados, es necesario el conocimiento de las funciones trigonométricas, así como de la noción de radián; por esta razón, en el apéndice hemos colocado una secuencia de instrucciones que fácilmente te llevarán a *construir* las funciones del seno, coseno, tangente, cotangente, secante y cosecante. Te pedimos, antes de iniciar con esta sección, diseñar las gráficas de estas funciones, para ponerte en el contexto del trabajo que realizaremos a continuación con estas mismas.

2.5.2.1. Gráfica de la función seno y coseno

A partir de las características observadas en la construcción de la función seno, podemos decir que esta toma valores entre 0 y 2π. No obstante, la curva tiene un patrón de comportamiento que le hace *reproducirse* cada 2π, 4π, …, $n\pi$, (para n par), etc. Dicha reproducción, ilimitada en *ondas* idénticas, es conocida como *periodicidad*, la cual permite clasificar a la función $f(x) = \text{sen}\, x$ como *función periódica*. La definición de función periódica es la siguiente:

> *Una función es periódica si existe un número real* k, *tal que* $f(x + k) = f(x)$.

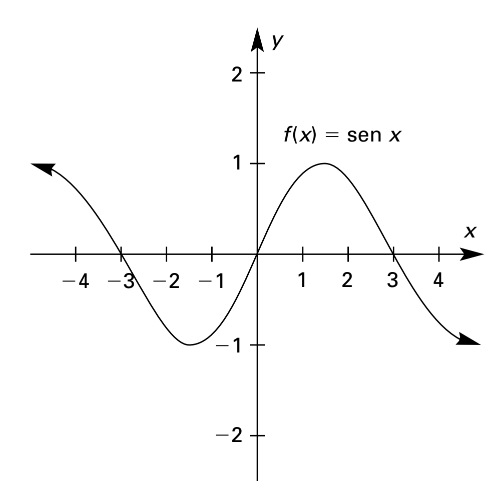


FIGURA 2.79. Gráfica de la función y = sen x.

Es fácil probar que $f(x)$ = sen x es periódica con periodicidad $k = 2\pi$. Usemos la proposición [2-16]:

$$f(x + 2\pi) = f(x)$$

Se desea probar que:

$$\text{sen}\,(x + 2\pi) = \text{sen}\, x \quad (1)$$

Puesto que conocemos la identidad:

$$\text{sen}\,(a + b) \equiv \text{sen}\, a \cdot \cos b - \cos a \cdot \text{sen}\, b \quad (2)$$

Entonces, de (2) y (1):

$$\text{sen}\, x \cdot \cos 2\pi - \cos x \cdot \text{sen}\, 2\pi = \text{sen}\, x$$

Y dado que:

$$\cos 2\pi = 1 \;\text{ y }\; \text{sen}\, 2\pi = 0$$

Se tiene:

$$\text{sen}\,(x + 2\pi) = \text{sen}\, x$$

O bien

$$f(x + 2\pi) = f(x)$$

Lo cual prueba la periodicidad de la función.
En resumen, corrobórese con las gráficas de las Figuras 2.80 y 2.81:

a) La función $f(x)$ = sen x tiene por dominio todos los números reales $\mathbb{R}$.
b) Su campo de variación es el intervalo $[-1, 1]$.

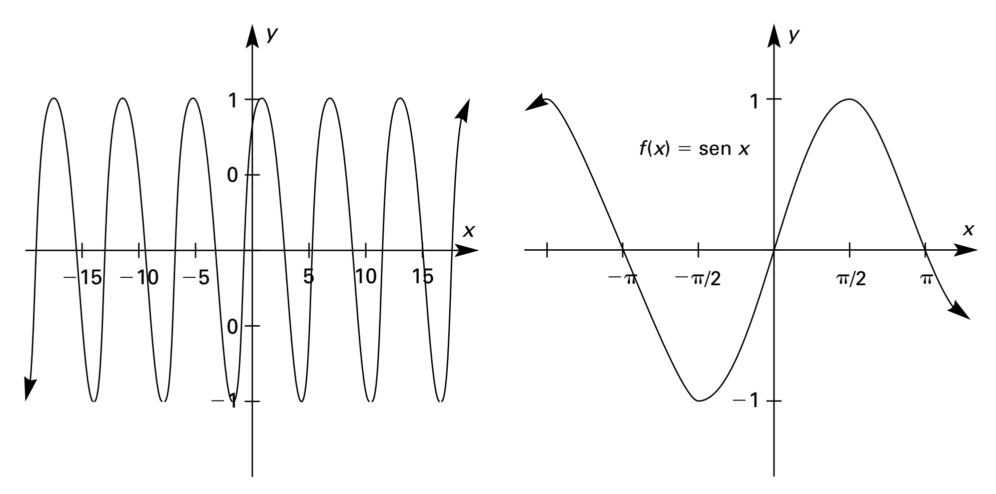


FIGURA 2.80. Periodicidad de la función seno.

FIGURA 2.81. La gráfica de la función seno en un sólo ciclo.

c) Es acotada inferiormente para $y \geq -1$, y superiormente en $y \leq 1$.
d) Cuenta con máximos y mínimos cada $\pm\frac{\pi}{2}n$, y con torceduras cada $\pm\frac{\pi}{4}n$.
e) Es periódica, con periodo $k = 2\pi$.
f) La función es impar puesto que $f(-x) = f(x)$, sen $(-x) = -$sen x, y es simétrica respecto al origen.
g) La función seno se anula en toda $x = n\pi$.
h) Es positiva en los intervalos $2n\pi \leq x \leq (2n + 1)\pi$ y negativa en los intervalos complementarios.

En la Figura 2.82, aparece la grafica de la función $f(x) = -$sen x, observa el efecto que hace el signo a la función original.

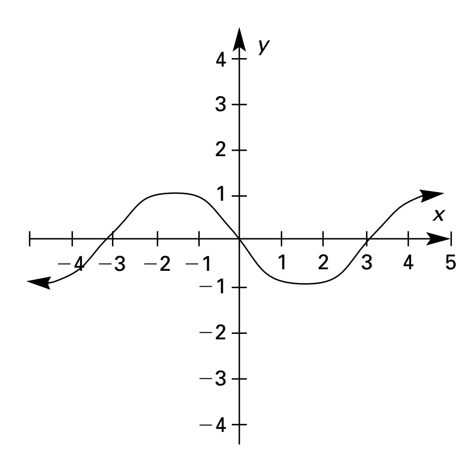


FIGURA 2.82. Gráfica de la función $f(x) = -$sen x.

Realiza un análisis semejante a la gráfica de la función $f(x) = \cos x$, Figura 2.83, verifica a partir de la definición si es periódica, su dominio, campo de variación, valores de x donde se anula, e intervalos donde es positiva. Confirma, además, que esta última es la misma función seno desplazada $\frac{\pi}{2}$ unidades a la izquierda y en dirección del eje x. Es decir, muestra que $\operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x$, y prueba además su simetría observando si es par o impar.

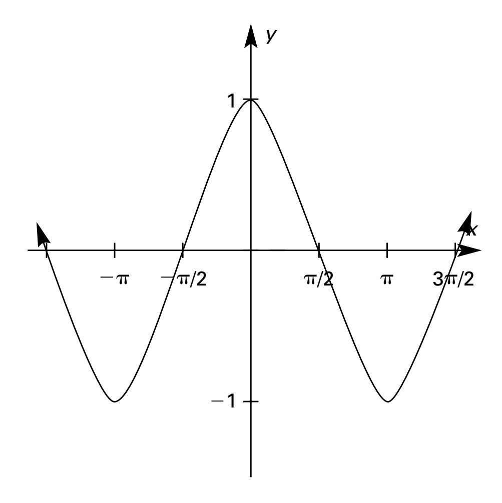


FIGURA 2.83. Gráfica de la función coseno, $f(x) = \cos x$.

2.5.2.2. Gráficas de las funciones tangente y cotangente

La función tangente se expresa como $f(x) = \operatorname{tg} x$. A través del ejercicio propuesto en el apéndice, sección I, se construyó la gráfica de esta función como se muestra en la Figura 2.84.

Un análisis a esta última deja ver que:

a) Su dominio son todos los números reales a excepción de los valores múltiplos de $\pm\frac{\pi}{2}n$, o bien $\mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + n\pi\right\}$.
b) En $x = \frac{\pi}{2} + n\pi$ sus ramas se van a infinito, siendo esta la ecuación de sus asíntotas.
c) Su campo de variación es de $(-\infty, \infty)$.
d) No es acotada.
e) Es creciente en los intervalos $\left(-\frac{\pi}{2}n, \frac{\pi}{2}n\right)$.
f) La función se anula cada $x = n\pi$.
g) Es periódica con periodo π puesto que $\operatorname{tg}(x + \pi) = \operatorname{tg} x$. Verifica esto último usando la identidad adecuada.

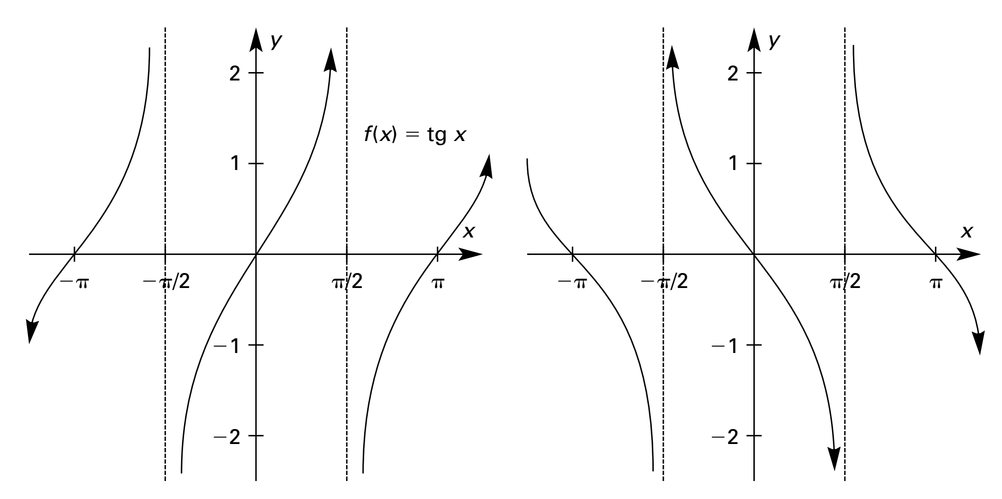


FIGURA 2.84. Gráfica de $y = \text{tg } x$. **FIGURA 2.85.** $y = -\text{tg } x$.

h) Es impar a partir de que $\text{tg }(-x) = -\text{tg } x$, luego es simétrica con respecto al origen.
i) Es positiva siempre que $n\pi < x < \frac{\pi}{2} + n\pi$, y es negativa en $-\frac{\pi}{2} + n\pi <$ $< x < n\pi$.
j) No cuenta con máximos ni mínimos y si con una torcedura cada $x = n\pi$.

El efecto que hace la multiplicación por menos a la función tangente es la de dar un giro de 180° a su gráfica y reflejarlo sobre sus asíntotas, tal como se aprecia en la Figura 2.85. Esta última función es la misma que $f(x) = \cot x$ (véase Figura 2.86) sólo que la segunda se encuentra desplazada $n\pi$ unidades respecto a la primera.

Realiza un análisis de la función cotangente semejante al que hicimos a la función tangente, verifica dominio, contradominio, periodicidad, valores donde cruza al eje x, intervalos donde la función es positiva y negativa.

¿Qué sucede a la función cotangente al multiplicarle por menos uno? ¿En qué se parece esta última a la función tangente? (véase Figura 2.87).

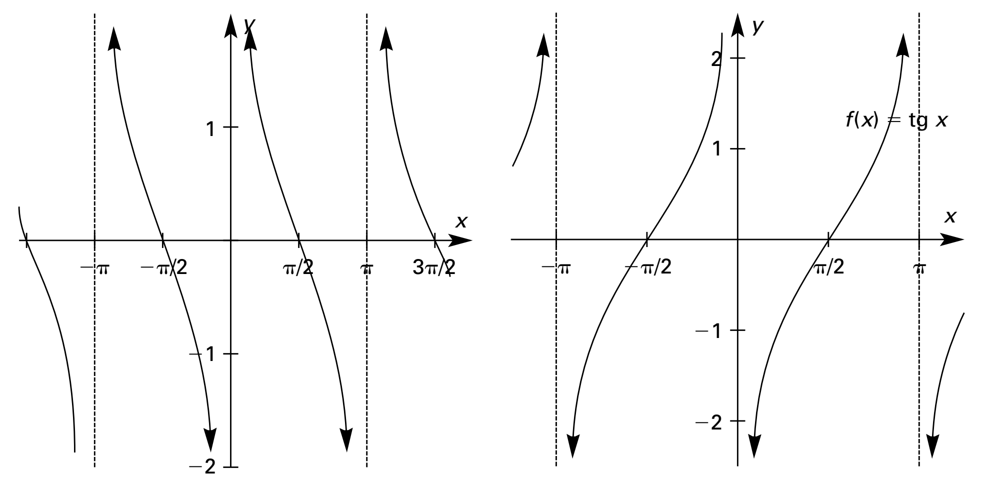


FIGURA 2.86. Gráfica de $y = \text{cotg } x$. **FIGURA 2.87.** $y = -\text{cotg } x$.

Expresa a través de alguna identidad trigonométrica la relación entre la tangente y cotangente.

2.5.2.3. Gráfica de la función secante y cosecante

La función cosecante, Figura 2.85, se define a partir de la función seno como su recíproca, es decir, $\operatorname{cosec} x = \dfrac{1}{\operatorname{sen} x}$. Esto último facilita la construcción de la gráfica de la cosecante a través de la gráfica de la función seno. Haciendo uso de las ideas vistas anteriormente, cuando la gráfica de la función seno se va a cero, la gráfica de su recíproca tiende a infinito; ello ocurre para valores de $n\pi$ donde la recíproca tiene asíntotas. Las gráficas de la función seno y cosecante coinciden en los valores $\pm\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n$ (véase la gráfica de la Figura 2.90).

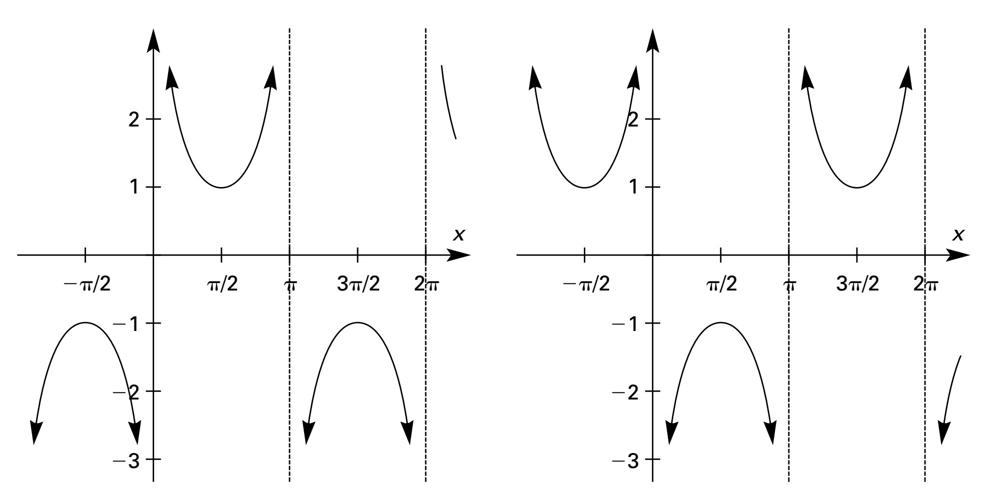


FIGURA 2.88. Gráfica de la función $y = \operatorname{cosec} x$.

FIGURA 2.89. $y = -\operatorname{cosec} x$.

Vista así, la función cosecante:

a) Tiene por dominio el conjunto $\mathbb{R} - \{n\pi\}$.
b) Por contradominio todos los reales menos el contenido numérico del intervalo $(-1, 1)$, sin incluir al uno y al menos uno.
c) Es positiva en los intervalos $[n\pi, (n + 1)\pi]$, negativa en $[(n - 1)\pi, n\pi]$.
d) Tiene máximos en $\dfrac{\pm 3\pi}{2}, \dfrac{\pm 7\pi}{2}, \ldots$ y mínimos en $\dfrac{\pm\pi}{2}, \dfrac{\pm 5\pi}{2}, \ldots$
e) La función es simétrica respecto al origen, puesto que es una función impar, es decir, $\operatorname{cosec}(-x) = -\operatorname{cosec} x$.
f) La función no corta al eje x.
g) Al multiplicarse por menos uno sufre el efecto que se observa en la Figura 2.89, o sea, que su gráfica se invierte cambiando de positiva a negativa y viceversa.

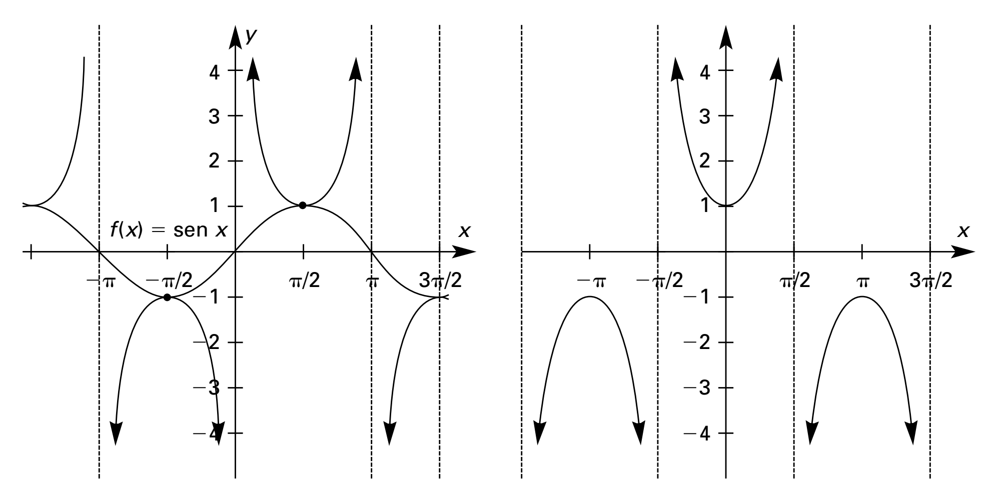


FIGURA 2.90. Las funciones seno y cosecante son recíprocas una de la otra.

FIGURA 2.91. Gráfica de la función secante.

Realiza un análisis de las funciones secante y menos secante, que aparece en la Figura 2.91, semejante al que hicimos a la función cosecante, verifica dominio, contradominio, periodicidad, valores donde cruza al eje x, intervalos donde la función es positiva y negativa, simetría, si es par o impar, etc.

¿Qué sucede a la función secante al multiplicarle por menos uno? Figura 2.92. ¿En qué se parece esta última a la función cosecante multiplicada por menos uno?

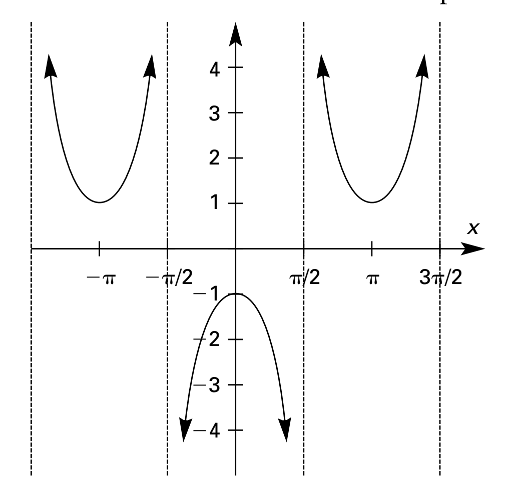


FIGURA 2.92. $y = -\sec x$.

2.5.3. EFECTOS A LA FUNCIÓN $y = a$ sen $(bx - c)$

Después de haber analizado las propiedades fundamentales de las funciones trigonométricas elementales de seno, coseno, tangente, etc., nuestro interés se centra en ampliar el estudio de estas funciones a través de los efectos que los parámetros a, b y c efectúan en ellas cuando se escriben en la forma general $y = a$ sen $(bx - c)$.

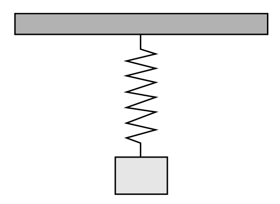


FIGURA 2.93. Oscilaciones de un sistema masa-resorte.

Particularmente, las funciones de la forma $y = a$ sen $(bx - c)$ son soluciones de *ecuaciones diferenciales* que estudiarás en otros cursos, más adelante. En general, estas funciones describen el movimiento simple de masas sujetas a resortes como el que se aprecia en la Figura 2.93. No obstante, al final del tema simularemos un ejemplo concreto. En la práctica, la función $y = a$ sen $(bx - c)$ se escribe como $x(t) = A$ sen $(wt - \phi)$; en principio dejaremos la notación original para el reconocimiento de los efectos que efectúa cada uno de los parámetros.

2.5.3.1. El efecto de la «amplitud» $y = a$ sen x

El efecto que produce en la función estándar $y =$ sen x, el parámetro a como $y = a$ sen x, es el de asignar a cada valor de la imagen una *ampliación* o estiramiento o, en su defecto, una *disminución* o contracción del rango sobre el que cambia la nueva función, lo cual depende del valor que se asigne al parámetro a, es decir, para valores mayores que uno $a > 1$ o bien menores que uno $a < 1$, respectivamente.

Las gráficas que aparecen enseguida: Figura 2.94, difieren en cada caso para valores del parámetro a en los siguientes términos: $a =$ 0,1, 0,25, 0,5, 1, 2, 3 y 4. Obsérvese que en éstas cambia el rango de cada nueva función y, consecuentemente, la posición de los valores máximo y mínimo de cada una.

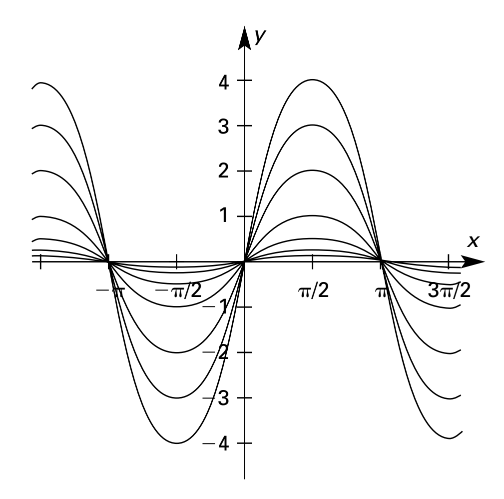


FIGURA 2.94. $y = a$ sen x, para diferentes valores de a.

En los casos donde $a > 1$ las gráficas se *estiran* sobre un eje imaginario $x = \pm\frac{\pi}{2}n$, en tanto que en las gráficas para $a < 1$ se contraen replegándose al eje de las x sobre el mismo.

Por las características del parámetro a, este es conocido generalmente como *amplitud* de la función $y = a$ sen $(bx - c)$.

2.5.3.2. El efecto «fase» en y = sen bx

A diferencia del efecto que produce al rango de la función el parámetro a, el parámetro b afecta su campo de variación disminuyéndolo o ampliándolo. según sea $b > 1$ o bien $b < 1$, a este efecto se le conoce como *cambio de periodo* o simplemente *periodo*, Figuras 2.95 y 2.96. En los ejemplos que se presentan enseguida, los parámetros de comparación fueron para $b = 1$, caso de la función estándar y = sen x y $b = 2$ para y = sen $2x$. Nótese la contracción que $b = 2$ produjo al dominio de la función y = sen x *partiendo* por la mitad el intervalo, dejándole como $[0, \pi]$. En el segundo caso, Figura 2.97, la comparación es con el mismo valor del parámetro $b = 1$ en y = sen x y $b = \frac{1}{2}$ para y = sen $\frac{1}{2}x$; aquí, el dominio es cambiado por el parámetro duplicándole entre $[0, 4\pi]$, luego, ese es el *periodo* de la nueva función.

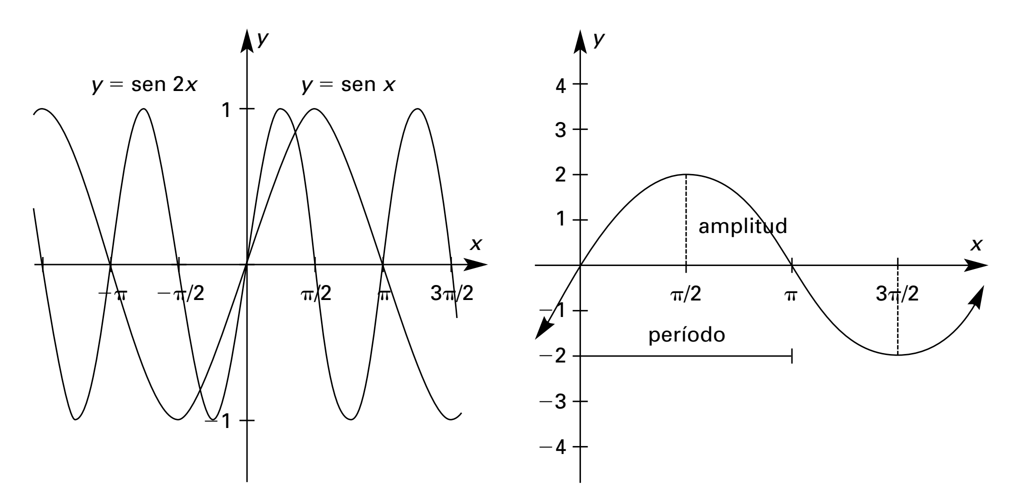


FIGURA 2.95. Cambio de período en y = sen x.

FIGURA 2.96. Período y amplitud en y = sen x.

A partir de lo anterior, las respuestas a las siguientes preguntas deben ser inmediatas: ¿Cómo es el dominio de las funciones y = sen $4x$, y = sen $6x$, y = sen $\frac{1}{4}x$? Te pedimos que, aparte de contestar, diseñes las gráficas correspondientes. Te puedes ayudar con las gráficas de las Figuras 2.95 y 2.97.

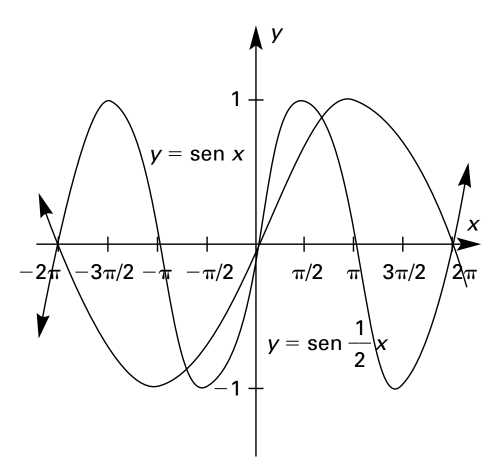


FIGURA 2.97. Cambio del periodo que produjo el efecto del parámetro b en la función $y = \text{sen}\,\frac{1}{2}x$.

2.5.3.3. El cambio de fase en $y = \text{sen}\,(x + c)$

Un valor c sumado o restado a la variable x, como en el caso $y = \text{sen}\,(x - c)$, produce el efecto de *desfasar* la gráfica de la función $y = \text{sen}\,x$ en c unidades, sobre el eje x, según sea el signo de ese parámetro, a la izquierda si c es positivo y a la derecha si es negativo. En el ejemplo que se muestra a continuación, Figura 2.99, dimos un valor para c de π, lo cual, obviamente, *desfasa* la gráfica de la función $y = \text{sen}\,x$ en π unidades; distinguiéndose la nueva función como: $y = \text{sen}\,(x - \pi)$? En el caso que se presenta en la Figura 2.98, el cambio de fase ocurre por que dimos al parámetro c un valor de $-\frac{\pi}{2}$, quedando la nueva función como $y = \text{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$.

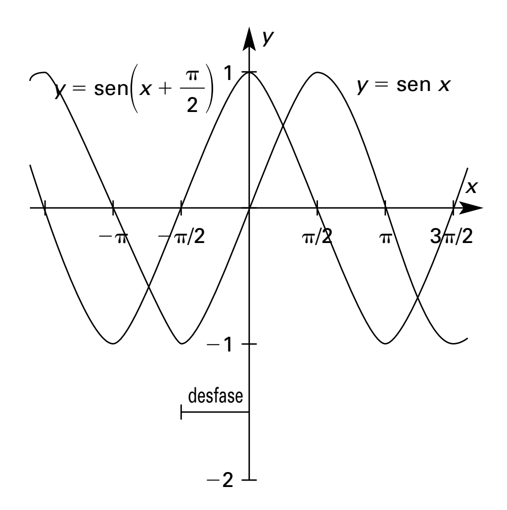


FIGURA 2.98. Desfase $\frac{\pi}{2}$ a la izquierda en $y = \text{sen}\,x$.

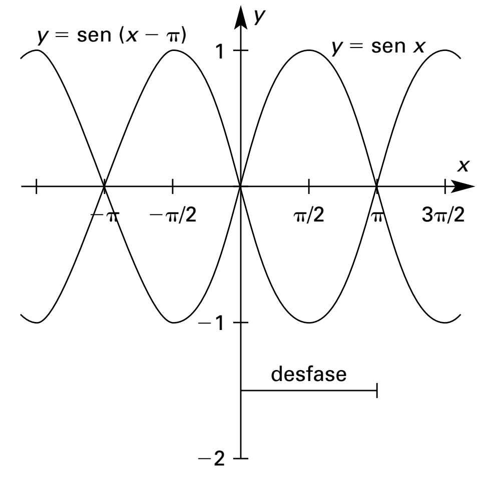


FIGURA 2.99. Desfase π a la derecha para $y = \text{sen}\,x$.

Generalicemos con un caso particular en el que utilicemos los tres parámetros a, b y c, por ejemplo la función $y = 4 \text{ sen } \frac{1}{2}(x - \pi)$. Esta tiene:

$$\text{Fase} = \pi$$
$$\text{Periodo} = 3\pi$$
$$\text{Amplitud} = 4$$

La gráfica corresponde a una *senoidal*, desfasada a la derecha π unidades, con un campo de variación entre $[-4, 4]$ y con un ciclo completo dado por su periodo en el intervalo $[\pi, 5\pi]$. Figura 2.100.

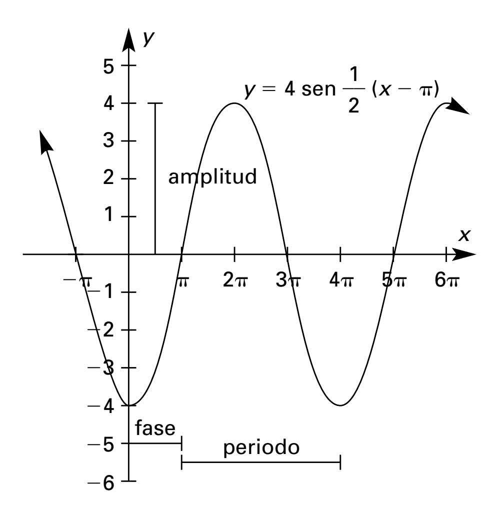


FIGURA 2.100. Fase periodo y amplitud para y sen x.

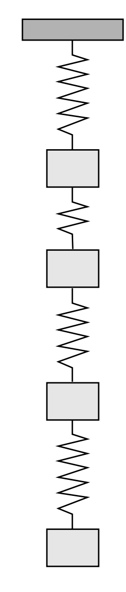


FIGURA 2.101. Diferentes posiciones de la masa del resorte en su elongación.

EJEMPLO

La Figura 2.101 muestra las diferentes posiciones del estiramiento de un resorte al oscilar libremente bajo la acción de una masa sujeta a su extremo inferior; el resorte mismo está sujeto por el extremo superior.

Supongamos que el resorte oscila debido a las condiciones de la función

$$y = 3 \text{ sen } \frac{1}{2}(x - \pi)$$

la cual le sirve de ley de control de su movimiento.

Te pedimos que consideres cada una de las siguientes posiciones del resorte como una *instantánea*; es decir, para cada una de esas posiciones hemos detenido el movimiento, como si sacáramos fotografías en cada caso, para con ello analizar la propia posición de los objetos involucrados en el problema.

En la secuencia, que se aprecia a continuación, colocamos tres instantáneas del movimiento del sistema, una al lado de la otra. Observa la gráfica que les describe en la Figura 2.102, ¿la reconoces?

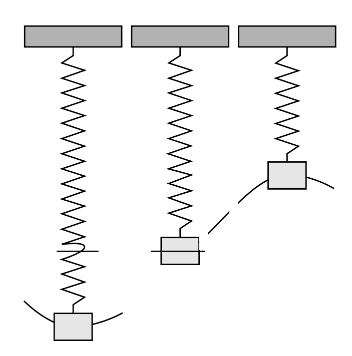


FIGURA 2.102. Resorte en movimiento desplazado.

Finalmente, en la Figura 2.103 simulamos el movimiento del resorte recorriéndole de su posición original para dejar ver la forma en que describe la sinusoide en por lo menos dos periodos. En la simulación te será fácil reconocer cómo la longitud del resorte *aumenta* y *disminuye* describiendo la gráfica de la función; eso te hará recordar la definición que anteriormente se dio del concepto de variable, variación y variabilidad.

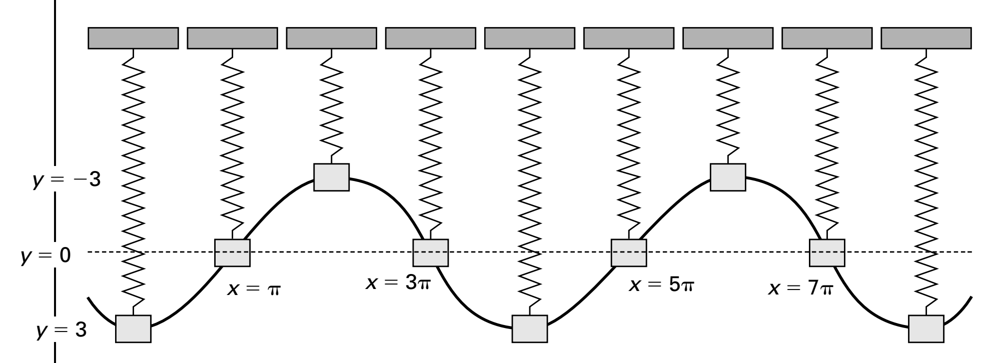


FIGURA 2.103. Simulación completa del movimiento del resorte.

En aquellos lugares donde la sinusoide alcanza valores máximos y mínimos, se dice que el sistema masa-resorte se coloca en *estado de equilibrio* concepto que, al menos en la gráfica, y por lo pronto, no requiere de mucha explicación.

A partir de la gráfica anterior, intenta responder las siguientes preguntas y cuestiones:

a) ¿Cuál de los valores asociados a la gráfica, como son la amplitud, fase y periodo, tienen que ver con la variación de la longitud del resorte?
b) ¿Cuál de los elementos del sistema masa-resorte describe la gráfica de la función?
c) ¿Entre qué valores oscila el cambio de la longitud del resorte?
d) ¿Cuáles son los valores que toman la amplitud, la fase y el periodo en la simulación?
e) Describe con tus palabras el significado de la amplitud a través del la oscilación del resorte.
f) ¿Qué otra variable está involucrada en el movimiento del resorte?
g) Describe las coordenadas donde el sistema masa-resorte alcanza estados de equilibrio.

Debajo se encuentra la gráfica de la función en el sistema coordenado a una escala distinta de la usada para la simulación, Figura 2.104.

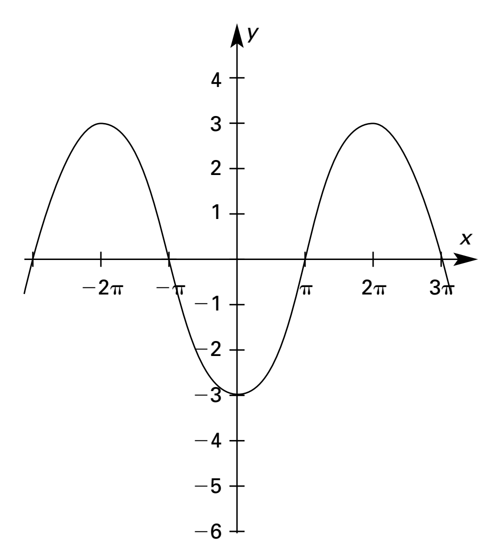


FIGURA 2.104. Gráfica de las oscilaciones masa-resorte.

A partir de lo visto en el parágrafo anterior, no te será difícil construir la gráfica de la función coseno en la forma $y = a \cos (bx - c)$, así como reconocer los valores de los parámetros asociados: ampliación, fase y periodo.

2.6. FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

2.6.1. INVERSA DE LA FUNCIÓN TANGENTE

Otra forma de probar si una función $f(x)$ tiene inversa, es verificar si esta *aumenta* o *disminuye* constantemente al aumentar la variable x; en otras palabras, si la función es creciente o decreciente en todo su dominio, entonces tiene inversa. ¿Por qué?

La función $f(x) = \operatorname{tg} x$, Figura 2.105, es creciente en todo su dominio $-\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}$, consecuentemente tiene inversa, la cual se escribe como $f^{-1}(x) = \operatorname{arctg} x$. Véanse las Figuras 2.106 y 2.107.

Al girar la función primitiva $f(x) = \operatorname{tg} x$, 180° sobre la bisectriz, la nueva función $f^{-1}(x) = \operatorname{arctg} x$, hereda simétricamente los valores de los campos de definición y variación de la primera. Analicemos bajo esa perspectiva la nueva función:

a) El dominio de $f^{-1}(x)$ son todos los números reales entre $(-\infty, \infty)$, siendo este el campo de variación de $f(x)$.

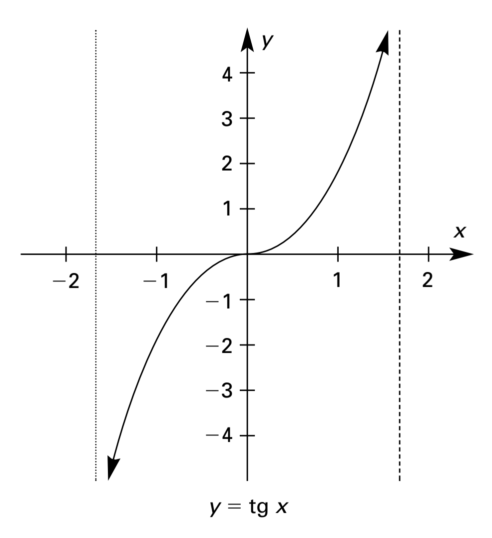


FIGURA 2.105. Gráfica de la función $y = \text{tg } x$.

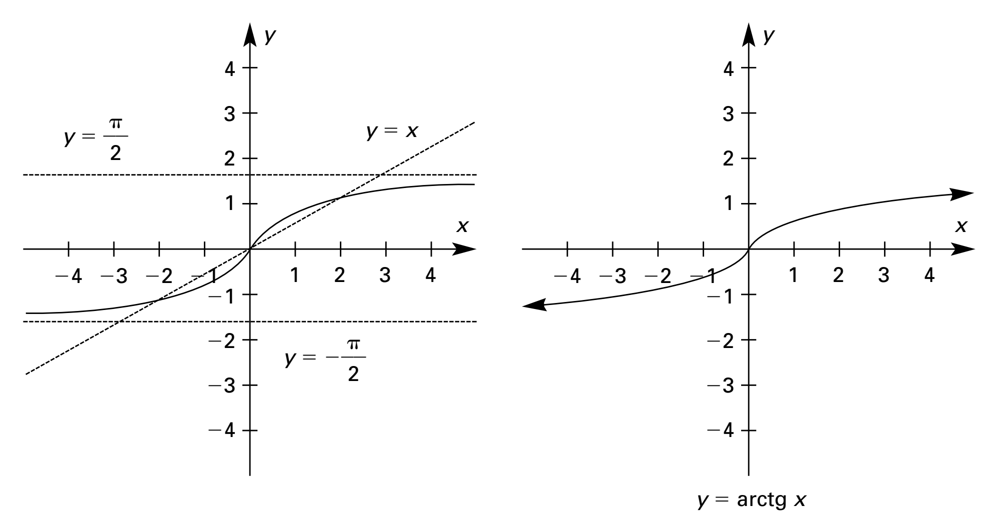


FIGURA 2.106. Inversión de la gráfica de $y = \text{tg } x$.

FIGURA 2.107. Gráfica invertida de $y = \tan x$.

b) En tanto que el campo de variación de $f^{-1}(x)$ es $\frac{-\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$, este último corresponde al dominio de $f(x)$.

c) Las asíntotas verticales que $f(x)$ tiene en $x = -\frac{\pi}{2}$ y $x = \frac{\pi}{2}$, se convierten en asíntotas horizontales para $f^{-1}(x)$, colocadas en $y = -\frac{\pi}{2}$ e $y = \frac{\pi}{2}$.

d) La función está acotada inferiormente para $y \geq -\frac{\pi}{2}$ y superiormente para $y \leq \frac{\pi}{2}$.

e) La función $f^{-1}(x)$ es creciente en todo su dominio, tal como ocurre a $f(x)$.
f) La función es impar, como sucede a $f(x)$.
g) Ambas funciones cruzan el eje x en $x = 0$.

2.6.2. INVERSA DE LA FUNCIÓN SENO

Con los argumentos anteriores no es difícil graficar la inversa de la función seno. Le reconoceremos como $f^{-1}(x) = \text{arcsen } x$.

Para el bosquejo de la gráfica hicimos uso de los puntos coordenados correspondientes a la función seno: $\left(\frac{\pi}{2}, 1\right), \left(-\frac{\pi}{2}, -1\right), \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \left(-\frac{\pi}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, obtuvimos los valores simétricos de estos y los reflejamos haciendo uso de la recta a 45°, como se aprecia en la gráfica de la Figura 2.108, logrando así los correspondientes valores de la función inversa del seno, como son: $\left(1, \frac{\pi}{2}\right), \left(-1, -\frac{\pi}{2}\right), \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\pi}{4}\right), \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\pi}{4}\right)$.

La gráfica reflejada aparece en la Figura 2.109, cuenta con las siguientes características:

a) Su campo de definición se encuentra entre $-1 \leq x \leq 1$.
b) Su campo de variación se coloca entre $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.
c) Tiene cotas superior e inferior en $y = \frac{\pi}{2}$ e $y = -\frac{\pi}{2}$.
d) f^{-1} crece suavemente entre $x = -1$ y $x = 1$.

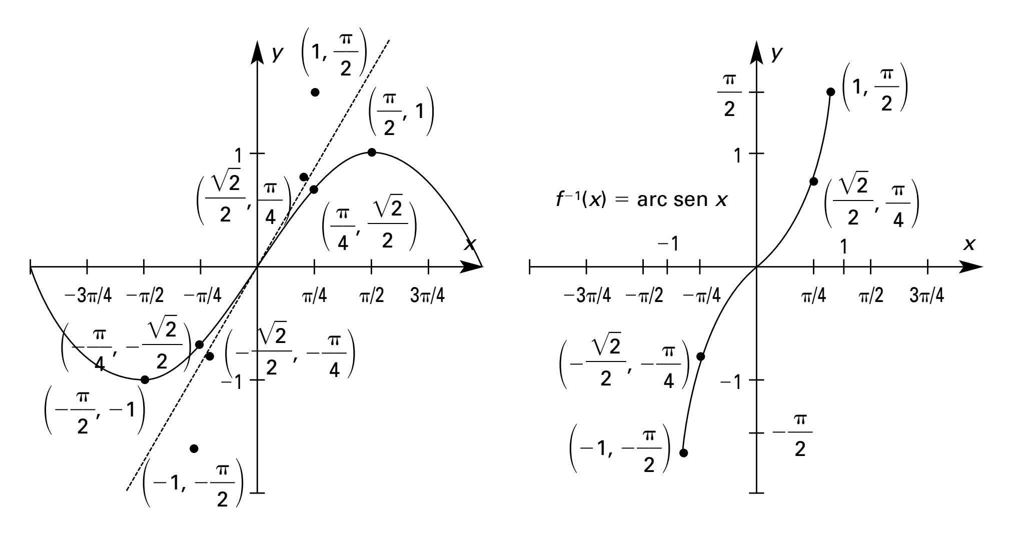


FIGURA 2.108. Inversión de la gráfica de $y = \text{sen } x$.

FIGURA 2.109. $y = \text{arc sen } x$.

e) La gráfica cuenta con una *torcedura* en $x = 0$.
f) Tiene *máximo* en $x = 1$ y un *mínimo* en $x = -1$.
g) Es una función impar.
h) No es periódica.
i) Intersecta al eje x en $x = 0$.

ACTIVIDADES Y EJERCICIOS DE LAS SECCIONES 2.5 Y 2.6

1. Bosqueja las gráficas de las siguientes funciones trascendentes en el dominio que se da.

a) $f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \leq 3 \\ 3 & \text{si } x > 3 \end{cases}$

b) $g(x) = \begin{cases} |x| & \text{si } x < 4 \\ x - 4 & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$

c) $h(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 \leq x < 2 \\ 3 & \text{si } 2 \leq x \leq 3 \\ 4 & \text{si } x > 3 \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ x + 2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

2. Bosqueja las gráficas de las siguientes funciones trigonométricas, usando las estrategias vistas a lo largo del capítulo:

a) $y = -5 \cos 2x$
b) $y = \operatorname{sen} x \cos x$
c) $y = \operatorname{sen}^2 x$ (se puede operar como $y = (\operatorname{sen} x)^2$, o bien: $y = \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen} x$)
d) $y = \cos^2 x$
e) $y = x + \cos x$
f) $y = x^2 \operatorname{sen} x$
g) $y = \dfrac{1}{x} + \cos x$
h) $y = (1 - x) \operatorname{sen} x$
i) $y = x \cdot \operatorname{arcsen} x$
j) $y = \operatorname{arcsen} x + \arccos x$
k) $y = \operatorname{arcsen} x \cdot \arccos x$

3. Escribe una función sinusoide dadas las siguientes características:

a) Periodo $= 2\pi$; amplitud $= 4$, fase $= 0$
b) Periodo $= 2\pi$; amplitud $= 3$, fase $= 0$

c) Periodo $= \pi$; amplitud $= \frac{1}{4}$¸ fase $= \pi$

d) Periodo $= 3\pi$; amplitud $= \frac{1}{5}$¸ fase $= \frac{\pi}{2}$

e) Periodo $= 2\pi$; amplitud $= 4$¸ fase $= 0$

f) Periodo $= \frac{\pi}{2}$; amplitud $= 2$¸ fase $= 0$

g) Periodo $= \frac{\pi}{4}$; amplitud $= 6$¸ fase $= \frac{-\pi}{2}$

4. Determina la amplitud, periodo y fase para cada una de las funciones que se dan. Enseguida dibuja la gráfica correspondiente.

a) $y = \text{sen}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

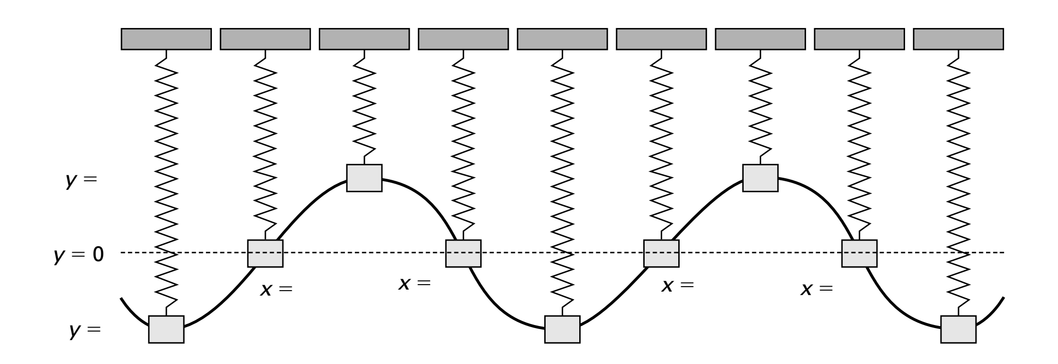
b) $y = \text{sen}\,(x + \pi)$

c) $y = 2\,\text{sen}\left(4x - \frac{\pi}{4}\right)$, la gráfica resulta inmediata si se factoriza la expresión, como $y = 2\,\text{sen}\,4\left(x - \frac{\pi}{16}\right)$

d) $y = 2\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

e) $y = \frac{1}{2}\cos\left(3x - \frac{\pi}{3}\right)$

f) Supongamos que una masa sujeta a un resorte oscila debido a la función $y = \frac{1}{2}\,\text{sen}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$, la cual le sirve de ley de control de su movimiento. En la figura de enseguida, se simula el movimiento del resorte recorriéndole de su posición original para dejar ver la forma en que describe la sinusoide.

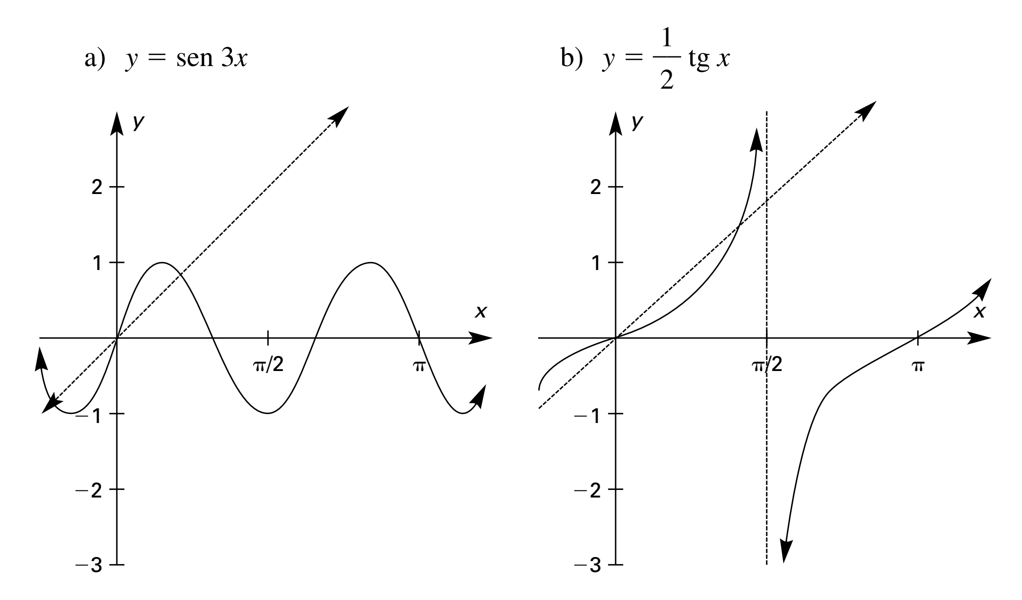


A partir de la gráfica anterior responde las siguientes preguntas y cuestiones:

a) Coloca los valores correspondientes de x e y en la gráfica.
b) ¿Entre qué valores oscila el cambio de la longitud del resorte?
c) ¿Cuáles son los valores que toman la amplitud, la fase y el periodo en la simulación?
d) Describe las coordenadas donde el sistema masa-resorte alcanza estados de equilibrio.
e) Describe la sinusoide en un sistema coordenado $X\ Y$.

5. Invierte las gráficas de funciones trigonométricas que se dan, eligiendo el intervalo adecuado de su campo de variación para hacerlo:

a) $y = \text{sen } 3x$ b) $y = \frac{1}{2} \text{ tg } x$



2.7. SISTEMAS ORGÁNICOS. GRÁFICAS Y PROPIEDADES DE LAS FUNCIONES EXPONENCIAL Y LOGARÍTMICA

En la investigación que realizó Humboldt a las regiones de México y América, que vimos en el parágrafo 2.2.5, sobre la variación de la presión atmosférica p, según variaba la altura h SNMM, la presión atmosférica cambia según la ley $P(h) = P_0a^h$, función donde P_0 es la presión constante al nivel del mar $P_0 = 0{,}76202$, a es una magnitud constante y h variable. Para efectos prácticos, la función que ordena la cantidad de valores de Humboldt requiere de un valor aproximado, que nos dimos a la tarea de determinar, siendo $a = 0{,}999881426\ldots$, con ello la función queda expresada de la siguiente manera:

$$P(h) = 0{,}76202(0{,}999881426\ldots)^h$$

El valor sugerido para la constante a, asegura por lo menos hasta las tres primeras cifras de la presión barométrica, según la Tabla 2.10 construida por Humboldt, que se presenta a la izquierda. La gráfica de la Figura 2.110, se refiere a la función, y muestra los valores de la tabla.

TABLA 2.10. Tabla de presiones Humboldt.

Alturas h	**Presión** p
0	0,762
500	0,719
1.000	0,679
1.500	0,641
2.000	0,605
2.500	0,570
3.000	0,536
3.500	0,504
4.000	0,474
4.500	0,445
5.000	0,418
5.500	0,392
6.000	0,367
6.500	0,343
7.000	0,320
7.500	0,300

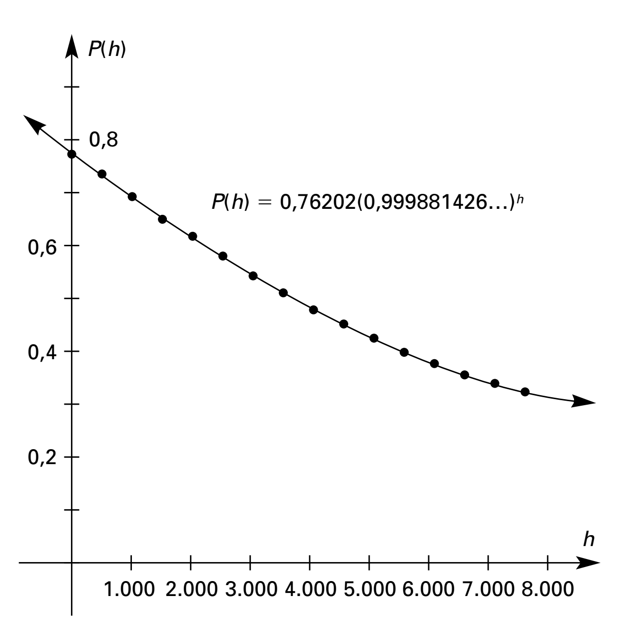


FIGURA 2.110. Gráfica de $P(h)$.

Los valores puntuales que aparecen en la gráfica a partir de alturas mayores a 5.000 m, no son *rectificados* por la curva, es decir, se *salen* de esta, debido a la cantidad de cifras que se tomaron para determinar la constante $a = 0{,}999881426\ldots$ Tomando por lo menos cuatro cifras más se corrige esa desviación.

La gráfica corresponde a crecimientos, en este caso decrecimientos, organizados de los fenómenos físicos que sufre la superficie de la tierra. Generalmente esos procesos reciben el nombre de *crecimientos orgánicos*, los cuales obedecen a leyes inevitables y cuentan con equilibrio y armonía entre el conjunto de unidades recíprocamente relacionadas que les constituyen.

Los sistemas de crecimiento orgánico son modelados a partir de funciones de la matemática, como son la función exponencial y la función logarítmica, por tanto no obedecen a funciones lineales. Dichos modelos son también conocidos como *sistemas dinámicos*, los cuales son formados por un conjunto de variables que dependen del tiempo. Por lo general, las variables involucradas son sujetas a una relación de causa-

efecto, de manera que a cualquier cambio en una sola de ellas, se produce un cambio en todo el sistema, que le lleva a *ajustes* continuos.

En el caso del modelo $P(h) = 0{,}76202(0{,}999881426\ldots)^h$, en este contexto, la función es llamada *respuesta del sistema*. Como se puede observar, el sistema se refiere a mediciones ocurridas hace más de 200 años, entre 1799 y 1803. No obstante, la función puede, con muy poco margen de ambigüedad, *predecir* los valores de la presión atmosférica p para valores presentes y futuros de la altura h SNMM en México y América. Sin embargo, el sobrecalentamiento del planeta ha llevado necesariamente a un *desgaste* del modelo y, consecuentemente, a un ajuste sistemático del mismo.

El *desgaste* que sufre todo sistema dinámico es conocido como *entropía*.

Otros casos semejantes de sistemas organizados son los siguientes:

1. El interés que produce una cantidad de dinero, en cierto tiempo t, depositada en el banco.
2. La ley de crecimiento de los árboles $A(t) = A_0a^{kt}$, donde t es el tiempo de crecimiento, A_0 la estatura inicial y $A(t)$ el crecimiento para un tiempo dado.
3. De igual manera sucede en los procesos radioactivos; por ejemplo, el radio se desintegra según la ley $X(t) = X_0a^{kt}$ (esto último lo verás con detalle en el curso de ecuaciones diferenciales), donde X_0 es la cantidad inicial del radio para $t = 0$, a y k constantes.

Asumiremos la forma general $y = ca^{kx}$ para describir los procesos orgánicos, donde x puede tomar, incluso, valores en la forma racional $\frac{p}{q}$, siendo p y q enteros positivos.

2.7.1. GRÁFICA DE LA FUNCIÓN EXPONENCIAL

> *Llamaremos «función exponencial» a la función con base positiva* a*, donde* $y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$.

[2-17]

Para construir la gráfica de esta función, se hace necesario dar valores a la constante a mayores y menores que uno. Este tipo de sistemas tiene una peculiaridad, es aquella de la regularidad con que se presentan los datos numéricos, más ello hay que verlo en casos concretos.

Dos propiedades importantes de la función exponencial $y = a^x$, que seguramente aprendiste en tus cursos de preparatoria, son estas: $a^0 = 1$ y $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$. Estas mismas expresiones serán definidas más adelante.

Es claro que el campo de definición de la función $y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$ está compuesto por todos los valores reales positivos y negativos. Formemos con algunos elementos del dominio, y las propiedades $a^0 = 1$ y $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$, la Tabla de valores 2-11 de la siguiente función $y = 2^x$ ($a = 2$).

TABLA 2.11. Tabla de valores para: $y = 2^x$.

x	y
…	…
-4	$2^{-4} = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16}$
-3	$\frac{1}{8}$
-2	$\frac{1}{4}$
-1	$\frac{1}{2}$
0	$2^0 = 1$
1	2
2	4
3	8
4	16
…	…

Dos características importantes sobresalen en la tabla; la primera de estas es que los valores del dominio fueron elegidos como números enteros, de modo que la diferencia entre cada dos de estos es 1. Este tipo de valores forman una sucesión conocida como *sucesión aritmética* cuya *razón de crecimiento* es 1, puesto que al ir sumando 1 a cada valor, se puede construir la sucesión completa. En el caso de los valores del campo de variación, estos tienen dos formas de crecimiento; por un lado los determinados con los valores negativos de x, que terminan en el 1, tienen la forma

$$\ldots \frac{1}{16} = \frac{1}{2^4}, \frac{1}{8} = \frac{1}{2^3}, \frac{1}{4} = \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2} = \frac{1}{2^1}, 1 = \frac{1}{2^0}$$

o bien

$$\ldots \frac{1}{2^4}, \frac{1}{2^3}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^1}, \frac{1}{2^0}$$

Ya habrás notado que estos tienen una *razón de crecimiento* distinta del propio crecimiento de las x. Si quisiéramos construir la sucesión de valores, iniciando con el 1, sería necesario multiplicar este por $\frac{1}{2}$ para lograr el siguiente valor; del mismo modo, multiplicando este último por $\frac{1}{2}$, llegaríamos al término $\frac{1}{2^2}$, etc., hasta cons-

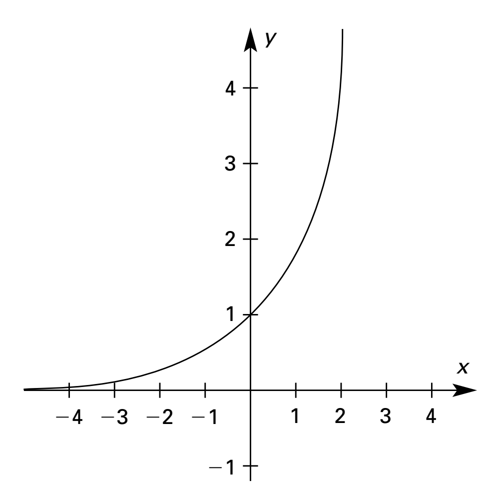


FIGURA 2.111. Gráfica de la función $y = 2^x$.

truir la sucesión con el número de términos que deseáramos. Este tipo de sucesiones son llamadas *sucesiones geométricas*, y al término con el que se va construyendo cada valor de la sucesión se le conoce como *razón de la sucesión*. La construcción del lado derecho del campo de variación, incluyendo al uno, tiene una razón de crecimiento que es 2; la sucesión geométrica que genera esta razón es de la forma: $2^0, 2^1, 2^2, 2^3, \ldots$ Las sucesiones geométricas serán estudiadas con más detalle en el Capítulo 6. La gráfica de la función exponencial $y = 2^x$ aparece en la Figura 2.111.

El diseño de una tabla semejante a la de la función anterior, nos lleva fácilmente a construir la gráfica de la función $y = e^x$, para a igual al número irracional 2,718281828... La gráfica de la función exponencial $y = e^x$ es *casi* igual a la de $y = 2^x$ y se puede observar en la Figura 2.115.

Algunas de las propiedades de la función exponencial son las siguientes:

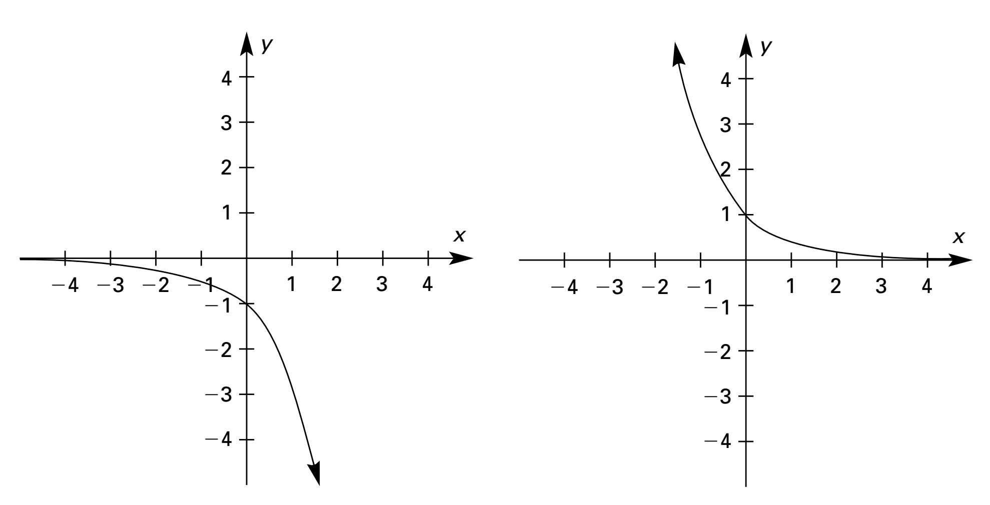


FIGURA 2.112. Gráfica de $y = -e^x$

FIGURA 2.113. Gráfica de $y = e^{-x}$

TABLA 2.12. Tabla de valores para $y = e^x$.

x	y
…	…
−4	$\frac{1}{e^4} = 0{,}018$
−3	0,05
−2	0,135
−1	0,357
0	$e^0 = 1$
1	2,718
2	7,38
3	20,08
4	54,59
…	…

a) La función es positiva para todo valor de x.
b) En $x = 0$ la función es igual a uno.
c) Para valores negativos del campo de definición, la función tiene por asíntota al eje x, acercándose cada vez más a cero conforme x crece.
d) La gráfica de la función crece sin límite cuando x toma valores muy grandes.
e) La gráfica cuenta con una cota inferior $y \geq 0$.
f) No tiene máximos ni mínimos.
g) La función exponencial es uno a uno. Véase la figura 2.114.

Las gráficas de las funciones $y = -e^x$ e $y = e^{-x}$, aparecen respectivamente en las Figuras 2.112 y 2.113. Observa el efecto que hace el signo menos, por un lado a la función $y = e^x$ y, por otro, a la variable x, en estas gráficas.

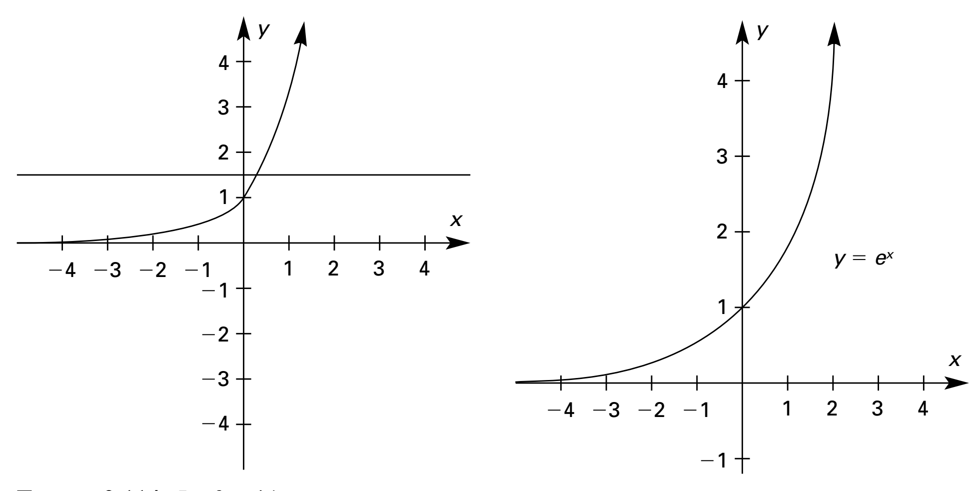


FIGURA 2.114. La función e^x es uno a uno

FIGURA 2.115. Gráfica de $y = e^x$.

2.7.1.1. Funciones hiperbólicas

Sobre todo en aplicaciones que tienen que ver con *ecuaciones diferenciales*, la función exponencial aparece bajo combinaciones de la forma: $\dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ y $\dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$. En la práctica, estas fórmulas toman definición llamándose *funciones hiperbólicas* y se obtienen a partir de operar con la *derivada* de la función exponencial. En esta sección creemos conveniente introducirlas, sin considerar el argumento de la derivada, definiéndolas como:

$$\operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

Estas son llamadas *seno hiperbólico* y *coseno hiperbólico*. De la misma forma resultan:

$$\operatorname{tgh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, \quad \coth x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

En las gráficas de la Figura 2.116, se puede ver el bosquejo de las funciones senh x y cosh x. Para su diseño hicimos uso de las gráficas de las funciones $\dfrac{1}{2}e^x$ y $\dfrac{1}{2}e^{-x}$, a las cuales sumamos y restamos sus ordenadas para determinar las gráficas de las funciones citadas.

¿Pudieras mencionar algunas características de estas funciones?

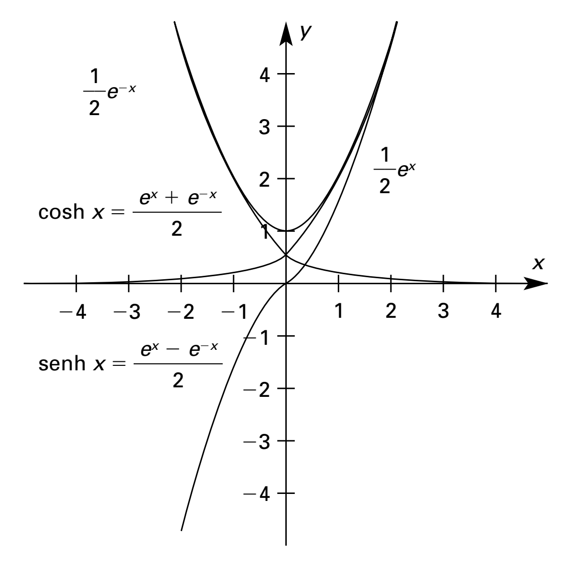


FIGURA 2.116. Gráfica de las funciones hiperbólicas sen *hx* y cos *hx*.

2.7.2. LA FUNCIÓN LOGARITMO Y SUS PROPIEDADES

La función logaritmo natural, $y = \ln x$, se desprende de la propia función exponencial que acabamos de construir. Para conocer esta última es necesario hacer la reflexión de la exponencial sobre la recta a 45°, puesto que la función logaritmo es inversa de ésta.

Para la reflexión, hemos usado algunos de los valores comunes del dominio de la función exponencial, donde aparecen enseguida sus coordenadas junto con sus correspondientes valores simétricos (los bosquejos de las gráficas se pueden ver en las Figuras 2.117 y 2.118).

$$\left(-2, \frac{1}{e^2}\right), \left(\frac{1}{e^2}, -2\right), \left(-1, \frac{1}{e}\right), \left(\frac{1}{e}, 1\right), (0, 1), (1, 0), (1, e), (e, 1)$$

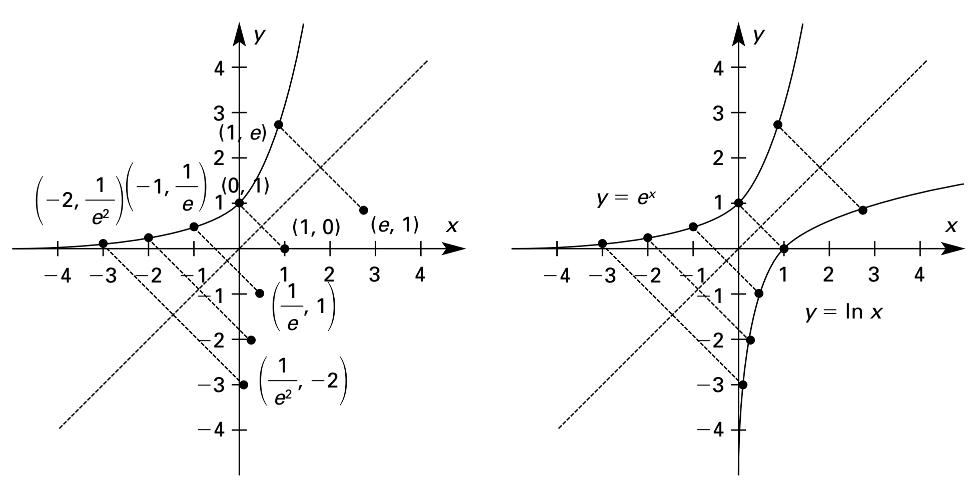


FIGURA 2.117. Inversión para $y = e^x$.

FIGURA 2.118. Gráfica de ln x.

Lo interesante de estos valores es que heredan las formas de crecimiento de las sucesiones que forman. Por ejemplo, las sucesiones de x e y que se determinaron con la función exponencial, tienen la siguiente forma:

- La sucesión aritmética: $x = \ldots, -2, -1, 0, 1, \ldots$
- La sucesión geométrica: $y = \ldots, \frac{1}{e^2}, \frac{1}{e}, 1, e, \ldots$

En tanto que las mismas sucesiones se invierten en los campos de definición y variación para la nueva función, o sea:

- La sucesión geométrica: $x = \ldots, \frac{1}{e^2}, \frac{1}{e}, 1, e, \ldots$
- La sucesión aritmética: $x = \ldots, -2, -1, 0, 1, \ldots$

Con estos pocos argumentos, y pasando por alto algunos aspectos inherentes a su definición, estableceremos que:

La función inversa de la función exponencial se llama función logarítmica.
Si $y = e^x$, $e = 2{,}718\ldots$, *entonces* $x = \ln y$ *o bien* $y = \ln x$.

[2-18]

Si la función es de la forma $y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$, entonces $x = \log_a y$, o bien: $y = \log_a x$.

Consecuentemente, a cada función exponencial le corresponde una propiedad inversa y determinada de la función logarítmica. Las propiedades que se aprecian inmediatas en la gráfica de la función logarítmica, son:

2-19. La función logarítmica tiene por campo de definición solamente valores reales positivos, en tanto que la función exponencial es positiva en todo su campo de variación.
2-20. El logaritmo de $x = 1$, de cualquier base, es cero. En tanto que en la función exponencial, en $x = 0$, esta es igual a 1.
2-21. Los valores del campo de variación de la función logaritmo para $x < 1$ son negativos, y positivos para $x > 1$. En tanto, para valores negativos del campo de definición de la exponencial, la función es menor que 1 y para valores positivos crece sin límite.
2-22. La función logarítmica crece indefinidamente cuando x lo hace de igual forma. En tanto que la exponencial crece indefinidamente cuando x lo hace.

Otras propiedades que surgen al hacer la composición de las funciones $f(x) = e^x$ y $f^{-1}(x) = \ln x$, son las siguientes:

2-23. Haciendo la composición tenemos que: $e^{\ln x} = x$ (puesto que son inversas una de la otra), asumiendo el valor de $x = 1$, queda $e^{\ln 1} = 1$, o bien: $e^0 = 1$.
2-24. Por la propiedad conmutativa de la composición: $\ln e^x = x$, de igual manera si $x = 1$, tendremos: $\ln e = 1$.
2-25. El logaritmo del producto de dos números se expresa como: $\ln ab \Rightarrow$ (con a, b números reales cualesquiera).
Si hacemos $x = \ln a$ e $y = \ln b$, y para cada caso: $e^x = e^{\ln a}$ o bien $a = e^x$, $e^y = e^{\ln b}$ con $b = e^y$. De aquí que el producto $ab = e^x e^y = e^{x+y}$, aplicando logaritmos por ambos lados a esta última expresión, se tiene: $\ln ab = \ln e^{x+y}$. Donde $x + y = \ln ab$, o bien:

$$\ln ab = \ln a + \ln b$$

2-26. Si $x = \ln a \Rightarrow e^x = a$, y con $(e^x)^b = a^b$ (b es un número real cualquiera), es decir $e^{bx} = a^b$; aplicando logaritmos en ambas lados $\ln e^{bx} = \ln a^b$, es decir, $bx = \ln a^b$. O bien:

$$b \ln a = \ln a^b$$

2-27. De igual forma: $\ln a^{\frac{1}{r}} = \frac{1}{r} \ln a$.

Los siguientes ejemplos se refieren a leyes de crecimiento orgánico.

EJEMPLO 1

La curva que pasa por el punto $(0, -2)$, condición que podemos escribir como $y(0) = -2$, tiene por ecuación general $\ln (y + 3) = x + c$, donde c es una constante que depende de los valores x e y del punto dado. Se pide encontrar el valor de la constante c y la gráfica de la función.

SOLUCIÓN:

Siendo la solución general:

$$\ln (y + 3) = x + c \quad (1)$$

Apliquemos la exponencial en ambos lados de (1) (es como si aplicáramos antilogaritmo en ambos lados) de la siguiente manera:

$$e^{\ln (y+3)} = e^{x+c}, \text{ o bien: } y + 3 = e^x e^c$$

Expresión en la que tomaremos por $e^c = k$, como otra constante, porque despejando y de la última, queda:

$$y = ke^x - 3 \quad (2)$$

Dada la condición: $x = 0$ e $y = -2$, y sustituyendo estos valores en (2):

$$-2 = k - 3, \text{ en la que: } k = 1$$

Finalmente la expresión queda como:

$$y = e^x - 3$$

Cuya gráfica, que aparece en la Figura 2.119, corresponde a una función exponencial trasladada tres unidades hacia abajo sobre el eje de las y.

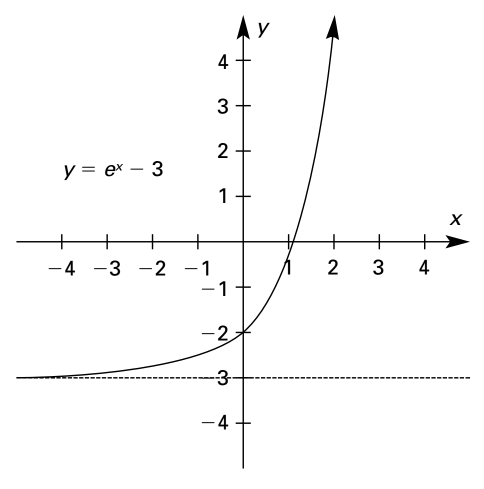


FIGURA 2.119. Gráfica de $y = e^x - 3$.

EJEMPLO 2

La temperatura de un cuerpo cambia con la ley $T(t) = ce^{kt} + 20$, donde t es el tiempo transcurrido en minutos y T la temperatura, sujeta a las condiciones:

1. $T(0) = 100$, lo cual significa que para un tiempo inicial igual a cero, la temperatura T del cuerpo era de 100 °C.
2. $T(10) = 40$, lo cual significa que 10 minutos después el cuerpo tenía una temperatura de 40 °C.

Se pide determinar los valores de las constantes involucradas haciendo uso de las propiedades antes vistas, diseñar la gráfica respectiva y determinar el valor de la temperatura del cuerpo después de transcurridos 4 minutos.

SOLUCIÓN:

Consideremos la solución general:

$$T(t) = ce^{kt} + 20 \quad (1)$$

Apliquemos a (1) la primer condición $T(0) = 100$, o sea:

$$T(0) = ce^{0} + 20 \Rightarrow 100 = c + 20$$

Quedando $c = 80$.
Sustituyendo $c = 80$ en (1) queda:

$$T(t) = 80e^{kt} + 20 \quad (2)$$

Apliquemos enseguida a (2) la segunda condición $T(10) = 40$, es decir:

$$T(10) = 80e^{10k} + 20$$

$$40 = 80e^{10k} + 20$$

$$80e^{10k} = 20 \Rightarrow e^{10k} = \frac{20}{80}$$

$$e^{10k} = \frac{1}{4}$$

Aplicando logaritmos en ambos miembros de la expresión:

$$\ln e^{10k} = \ln \frac{1}{4} \Rightarrow 10k = \ln \frac{1}{4}$$

$$k = \frac{\ln\left(\frac{1}{4}\right)}{10} = \frac{-1{,}38629}{10}$$

$$k = -0{,}138629$$

Sustituyendo este valor en (2), tenemos finalmente:

$$T(t) = 80e^{-0{,}138629t} + 20$$

Cuya gráfica se puede apreciar en la Figura 2.120.
Finalmente, haciendo uso de la última expresión, la temperatura del cuerpo después de haber transcurrido 4 minutos, $T(4) = ?$ queda como:

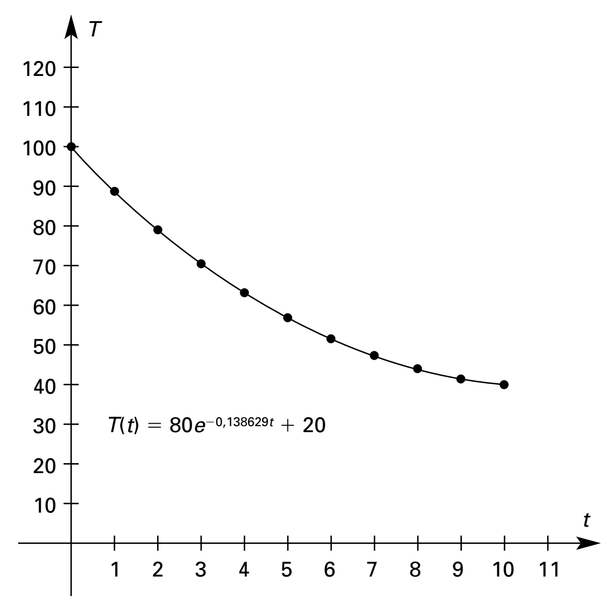


FIGURA 2.120. Gráfica de temperaturas del cuerpo del ejemplo 2.

$$T(4) = 80e^{(4)(-0,138629)} + 20$$

$$T(4) = 65,96\ °\mathrm{C}$$

Este último resultado muestra la *predicción* que hacemos de la temperatura T del cuerpo para un tiempo cualquiera. Aprovecha la fórmula y predice para $T(8)$, $T(12)$, $T(20)$. ¿Hasta qué valores del tiempo t es posible predecir?

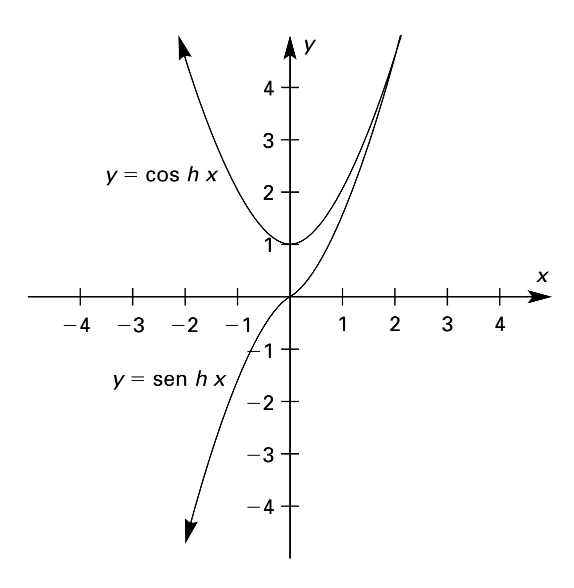
ACTIVIDADES Y EJERCICIOS DE LA SECCIÓN 2.7

1. Dibuja las gráficas de las funciones hiperbólicas $y = \operatorname{tgh} x = \dfrac{\operatorname{senh} x}{\cosh x}$ e $y = \coth x = \dfrac{\cosh x}{\operatorname{senh} x}$, a partir de las gráficas que se dan enseguida de: $y = \operatorname{senh} x$, $y = \cosh x$. Hazlo dividiendo las ordenadas de cada función, para hacer accesible el trabajo toma solamente los valores enteros del dominio. Determina para ambos casos los campos de definición y variación, haciendo un análisis de sus propiedades (véase figura de la página siguiente).

Dadas las siguientes funciones, determina su inversa y la gráfica correspondiente. En cada caso realiza primero operaciones aritméticas elementales y aplica ln o e en ambos lados de la expresión, según se requiera:

a) $y = e^x - 3$
b) $T(t) = 80e^{-0,138629t} + 20$
c) La función de Humboldt $P(h) = 0,76202(0,999881426\ldots)^{h}$*

* Usamos la denominación de *función de Humboldt* aún cuando realmente este investigador no hizo uso de esa expresión. Sus observaciones, al menos las que se refieren a la temperatura y presión, adquirieron un carácter más experimental que analítico.



d) $y = \ln(2x)$
e) $y = 3e^{5x}$
f) $y = \frac{1}{2}e^{5x+2}$
g) $y = \ln e^{x}$
h) $y = \ln(\ln x)$
i) $y = e^{-x} + 2$

Resuelve los siguientes problemas.

3. La cantidad de carbono-14 que resta al final de t años en una muestra de un fósil es X_0 (expresión que expresa una cantidad numérica conocida), está dada por la expresión general $M(t) = ce^{kt}$, donde $M(t)$ es la función que indica la cantidad de carbono-14 que resta después de t años. La expresión anterior está sujeta a las siguientes condiciones: $M(0) = X_0$, $M(5.600) = \frac{X_0}{2}$. Determine:

a) Los valores de las constantes c y k, involucradas sustituyendo en la expresión general las condiciones dadas.
b) La solución a partir de los valores de las constantes.
c) Predice la edad del fósil después de que se ha desintegrado el 90% del carbono-14.

4. Un cultivo de bacterias crece de acuerdo a la siguiente ley: $N(t) = ce^{kt}$. Un investigador tomó las siguientes observaciones del cultivo: $N(0) = N_0$, $N(1) = \frac{3}{2}N_0$. Determine:

a) Los valores de las constantes c y k, involucradas sustituyendo en la expresión general las condiciones dadas.

b) La solución $N(t)$ a partir de las constantes.

c) Predice el tiempo que tarda el cultivo en triplicarse, es decir $N(3) = ?$

5. Predice a través de la fórmula de Humboldt: $P(h) = 0{,}76202(0{,}999881426\ldots)^h$ la presión atmosférica $p(h)$ del cerro conocido como *El Mercedario* que se encuentra en la cordillera de los Andes, en las inmediaciones de Argentina, a una altura SNMM de 6.770 metros, es decir $p(6.770) = ?$ (Humboldt no conoció esa región). Compara ese resultado con los propios resultados que aparecen en la tabla, al principio de este tema.

La altura más alta que cita Humboldt es de 6.310 m SNMM, asumiéndola al volcán el *Chimborazo*, que se encuentra en los Andes ecuatorianos.

Límites y continuidad

3


GABINO BARREDA (1818-1881)

«Si suponemos: $\frac{a}{x}$, de manera que x vaya disminuyendo incesantemente, $\frac{a}{x}$ irá creciendo en proporción a medida que x, se vaya acercando a 0. De esta constante relación entre la disminución de x y el aumento de $\frac{a}{x}$, inferimos por inducción de variaciones concomitantes, que si x llegara a igualarse con 0, o si tocase su límite, como se dice, $\frac{a}{x}$ sería $= \infty$.»

G. BARREDA

Director y fundador de la Escuela Nacional Preparatoria en 1867. El teorema aparece en el documento llamado: «Examen del Cálculo Infinitesimal bajo el punto de vista lógico». Fue escrito por Barreda aproximadamente en 1870, y aparecido en la 3.ª edición de la *Revista Positiva*. Tipografía Económica, México, 1908.

3.1. DEFINICIÓN DE LÍMITE

3.1.1. LÍMITE DE UNA SUCESIÓN

En el Capítulo 1 vimos sucesiones de números racionales, como la siguiente: 1, 1,4, 1,41, 1,414, 1,4142, 1,41421, 1,414213, 1,4142135, que son atraídos por números irracionales, en este caso $\sqrt{2}$. Este último valor fue escrito al final de la sucesión, como:

$$1,\ 1{,}4,\ 1{,}41,\ 1{,}414,\ 1{,}4142,\ 1{,}41421,\ 1{,}414213,\ 1{,}4142135,\ \ldots,\ \sqrt{2}$$

toda vez que llamamos *último término* de la sucesión al valor $\sqrt{2}$, puesto que es el valor final, o valor *límite*, que *atrae* al contingente de valores de la sucesión.

En este proceso se pueden observar las siguientes regularidades:

a) El último valor de la sucesión es un número irracional fijo, constante, que puede ser denominado con la letra a.
b) La sucesión de valores es variable, los valores numéricos van cambiando consecutivamente, de aquí que estos cambios los podemos asumir con la letra x.
c) La diferencia consecutiva, $|a - x|$ tiende a convertirse en cero. Véase esto último a continuación.

La sucesión de diferencias $|a - x|$ entre el último de los valores, o sea $a = \sqrt{2} =$ $= 1{,}414213562373\ldots$ (Valor estimado por la calculadora hasta doce cifras decimales) y cada uno de los integrantes de la sucesión, es: 0,414213562373, 0,014213562373, 0,004213562373, 0,000213562373, 0,000013562373, 0,000003562373, 0, 000000542373, 0,0000000623. Como se puede ver, la diferencia entre el último valor tomado y $\sqrt{2}$ es de por sí muy pequeña; no obstante, nos podemos acercar al último valor aún más o tanto como queramos. ¿A qué valor numérico tenderá a parecerse la diferencia si tomamos, por ejemplo, seis valores más en la sucesión anterior? Es claro que la diferencia se parecerá cada vez más a cero. A partir de esto, diremos que, cuando la diferencia entre el valor tomado y el último valor de la sucesión, sea lo *suficientemente pequeña*, el *límite* de la sucesión será el último valor, en este caso $\sqrt{2}$. En consecuencia, el último valor de toda sucesión tendrá una primera definición en los siguientes términos:

El valor que «atrae» a los demás términos de una sucesión, y al cual nos podemos acercar tanto como queramos, se llama límite de la sucesión.

[3-1]

Aprovecharemos esta primera definición para dar otra alternativa, a partir de cantidades, como:

Una cantidad constante, hacia la que se aproxima una cantidad variable, de manera que en sus cambios de magnitud o variabilidad, la diferencia que existe entre la variable y la constante, es una cantidad tan pequeña como se desee.

[3-2]

3.1.2. LÍMITE DE UNA FUNCIÓN

Los argumentos anteriores solamente son válidos para los cambios de magnitud de la variable en las sucesiones numéricas donde el último valor, o límite de la sucesión, puede ser cualquier número real. No obstante, el valor que asume la definición de límite se aprecia en las funciones $y = f(x)$, en las que las sucesiones numéricas se presentan tanto en su campo de definición como en el propio campo de variación. Veamos esto último con un ejemplo.

EJEMPLO 1

Si sujetamos la sucesión de valores anterior: 1, 1,4, 1,41, 1,414, 1,4142, …, $\sqrt{2}$, al campo de definición de la función $f(x) = x^2$, tomando solamente los primeros cinco términos, en la cual, como se dijo, $\sqrt{2}$ es una cantidad fija que atrae a la sucesión, tendremos otra sucesión de valores en su campo de variación, que vendrá a ser: $f(1)$, $f(1{,}4)$, $f(1{,}41)$, $f(1{,}414)$, $f(1{,}4142)$, …, $f(\sqrt{2}) = (\sqrt{2})^2 = 2$, cuyo último término, como se puede apreciar, es 2. La sucesión numérica de valores que resulta es la siguiente:

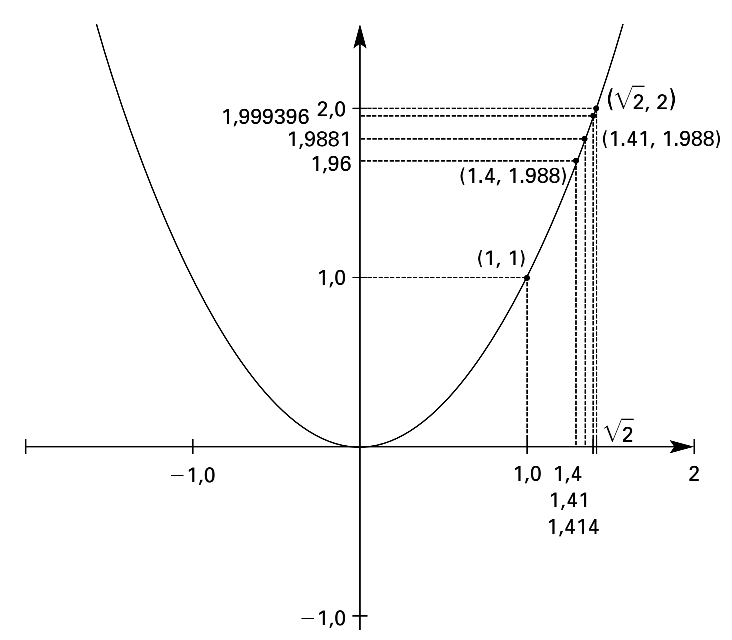


FIGURA 3.1. Los puntos coordenados tienen a apretujarse en el punto límite $(\sqrt{2}, 2)$.

1, 1,96, 1,9881, 1.,999396, 1,99996164, …, 2

Geométricamente tenemos que los valores de ambas sucesiones se agrupan en puntos coordenados de la forma: (1, 1), (1,4, 1,96), (1,41, 1,988), (1,414, 1,9881), apretujándose sobre el intervalo donde coinciden ambas sucesiones en la curva y aproximándose al punto de coordenadas $(\sqrt{2}, 2)$ el cual les sirve de límite, como se puede ver en la gráfica de la Figura 3.1. En este sentido, el concepto de límite permite hacer un estudio más detallado de la variación de las funciones.

Es costumbre escribir esto último con la siguiente expresión:

$$\lim_{x \to \sqrt{2}} x^2 = 2$$

Lo cual debe leerse como sigue: *Cuando la sucesión de valores de* x *tiene por último valor a* $\sqrt{2}$*, la sucesión de valores de* y *tiene por último valor a 2, el cual es su límite.*

Es común leer equivocadamente la expresión, diciendo: *Límite cuando* x *tiende a «a» de* f(x) *igual a* L. Lo cual no significa lo que ahí está escrito.

Luego, podemos asumir la siguiente definición para el concepto de límite de una función a través de este último resultado.

Cuando la sucesión de valores de x *tiene por último valor al número* a*, la sucesión de valores de* y *tiene por último valor al número* L*, el cual es su límite.*

[3-3]

Esto último se escribe como $\lim_{x \to a} f(x) = L$, teniendo como consecuencia que $f(a) = L$, siempre que el *número a* forme parte del dominio de $f(x)$.

EJEMPLO 2

En la función $f(x) = 5x - 1$, cuando la sucesión de valores de x se aproxima al número $a = 3$, la sucesión de valores de y se aproxima, sin duda, a $f(3) = 5(3) - 1 = 14$, o sea a $L = 14$. Podemos escribir esto último como:

$$\lim_{x \to 3} (5x - 1) = 14$$

La Tabla 3.1 atestigua el cálculo realizado.

Tabla 3.1. Tabla de valores para $y = 5x - 1$.

x	$y = 5x - 1$
…	…
2	9
2,5	11,5
2,89	13,45
2,9	13,5
2,99	13,95
2,999	13,995
…	…
3	14

3.2. LA EXISTENCIA DEL LÍMITE DE UNA FUNCIÓN

Siguiendo con lo visto en los ejemplos 1 y 2, nos podemos aproximar a $\sqrt{2}$ a través de otra sucesión de valores racionales distinta de la utilizada; por ejemplo, le podemos formar por la derecha del mismo número.

Supongamos algunos valores como los siguientes: 2, 1,5, 1,42, 1,415, 1,4143, … $\sqrt{2}$. Se puede ver que la diferencia entre el penúltimo valor 1,4143 y $\sqrt{2}$ es del orden de 0,0000864, o sea, muy cercano a este. Las coordenadas de los puntos que forman las sucesiones en ambos casos son las siguientes: (2, 4), (1,5, 2,25), (1,42, 2,016), (1,415, 2,002), (1,4143, 2,0002). De la misma manera que la sucesión de puntos por la izquierda, estos últimos se apretujan siendo atraídos por el punto de coordenadas $(\sqrt{2}, 2)$, el cual sirve de límite, en la curva, a ambas sucesiones, como se puede ver en la Figura 3.2.

En esencia, lo que se busca al incorporar ambas sucesiones, es verificar si ambas coinciden, o NO, en el punto límite, o bien si ambas son atraídas por este último, en este caso $(\sqrt{2}, 2)$.

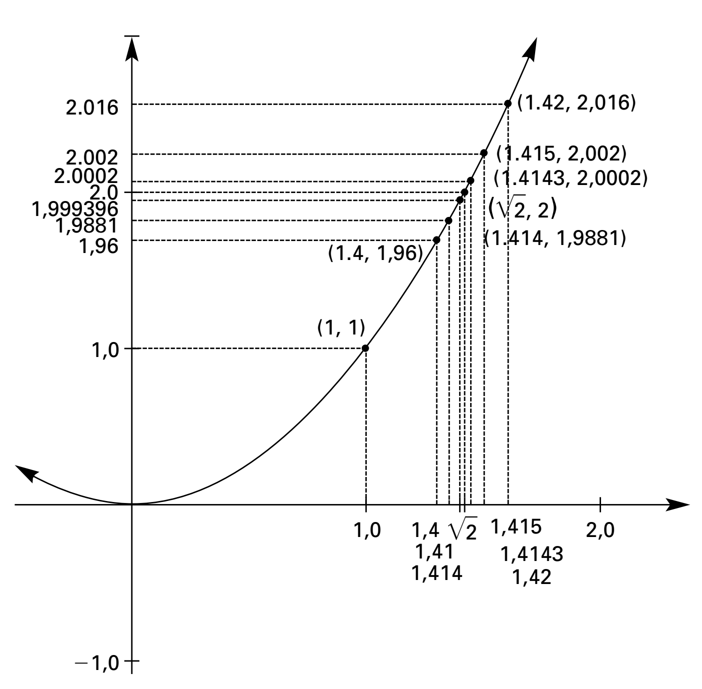


FIGURA 3.2. Por izquierda y derecha las sucesiones de puntos se apretujan en $(\sqrt{2}, 2)$.

TABLA 3.2

x	$y = x^2$
…	…,
1	1
1,,4	1,96
1,41	1,9881
1,414	1,999396
1,4142	1,99996164
↓	↓
$\sqrt{2}$	2
↑	↑
1,41423	2,0002
1,415	2,002
1,42	2,016
1,5	2,25
2	4
…	…

Si ambas sucesiones coinciden en el mismo punto, ello puede ser descrito simbólicamente de la siguiente manera:

$$\lim_{x \to \sqrt{2}^-} x^2 = 2 = \lim_{x \to \sqrt{2}^+} x^2$$

Dicha relación debe leerse, como: *Cuando la sucesión de valores de* x *por la izquierda (simbólicamente se escribe como* $x \to \sqrt{2}^-$*) y por la derecha (*$x \to \sqrt{2}^+$*), tienen por último valor a* $\sqrt{2}$*, la sucesión de valores de* y *de ambas sucesiones coinciden en 2, que es su límite.*

Esta última igualdad indica que la coincidencia de ambas sucesiones a un mismo punto determina la *existencia* del límite. De lo contrario, si ambas sucesiones no coinciden al mismo punto en y, se puede afirmar que el LÍMITE NO EXISTE. Usaremos enseguida la palabra *convergencia* cambiándola por *coincidencia*, que es la que utilizamos anteriormente. Convergencia se acerca más a la idea de *concurrencia* hacia un punto, que es lo que nos interesa. Escribiremos la primera afirmación de la siguiente manera.

La igualdad: $\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = L$ *indica que la convergencia de las sucesiones en* y *ocurre en* L*, cuando las sucesiones en* x*, por la izquierda (*$x \to a^-$*) y por la derecha (*$x \to a^+$*), convergen en* $x = a$.

[3-4]

Además, la proposición [3-3] vista anteriormente, agrupa en una sola a la proposición [3-2] y determina la existencia del límite de las sucesiones en *y*, o sea *L*, es decir:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

[3-5]

Geométricamente se puede observar la convergencia en la siguiente gráfica:

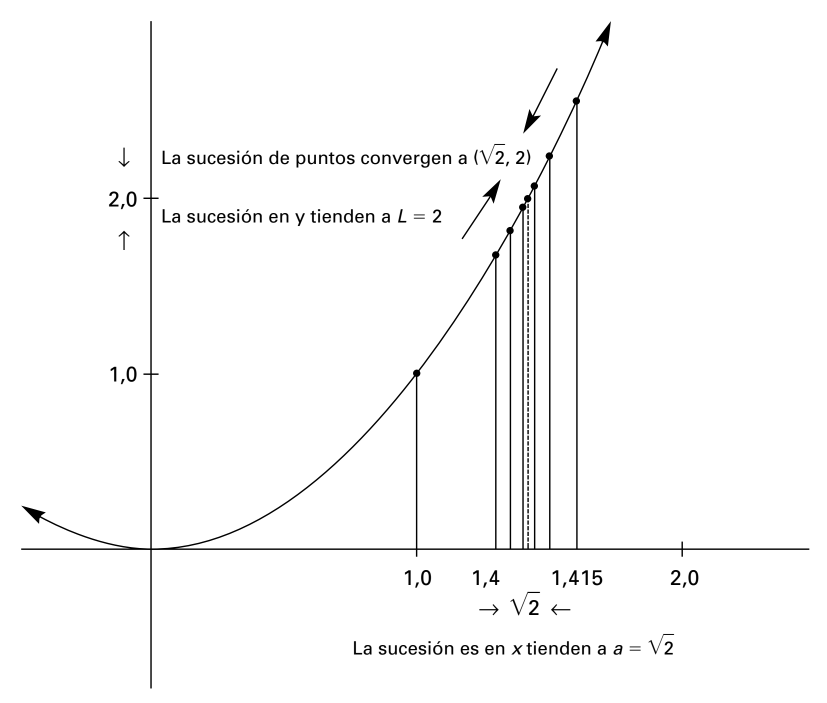


FIGURA 3.3. Convergencia hacia el punto límite.

En la Tabla 3.2 hemos condensado los valores de ambas sucesiones, por la izquierda y por la derecha, y en ella se puede ver también la convergencia de valores hacia el límite.

Hemos construido con todo propósito la función trascendental:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 1 \\ x^3 + 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

que se muestra en el ejemplo 3, para mostrar cómo funciona la proposición [3-4].

EJEMPLO 3

Verificar la existencia del límite: $\lim_{x \to 1} f(x)$, siendo $f(x)$ una función trascendental de la forma: $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 1 \\ x^3 + 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$.

SOLUCIÓN:

Para verificar la existencia del límite consideremos a $f_1 = x^2$ como la función por la izquierda de $x = 1$ y $f_2 = x^3 + 1$ la función por la derecha de ese valor.

Como se puede observar, el campo de definición de $f(x)$ son todos los reales $\mathbb{R}$, puesto que la función está definida en $x = 1$, toda vez que en este valor no lo está para $f_2 = x^3 + 1$. El valor del límite por la izquierda está dado simbólicamente por:

$$\lim_{x \to 1^-} (x^2) = (1^2) = 1$$

En tanto que por la derecha:

$$\lim_{x \to 1^+} (x^3 + 1) = ((1^3) + 1) = 2$$

Esto último es cierto aun cuando $x = 1$ no está definida en $f_2 = x^3 + 1$, dado que su dominio es abierto en ese valor.

De lo anterior se deduce que los límites *laterales*, por la izquierda y por la derecha, son distintos, es decir:

$$\lim_{x \to 1^-} (x^2) \neq (x^3 + 1) \text{ o bien: } 1 \neq 2$$

De donde podemos concluir que el límite buscado: $\lim_{x \to 1} f(x)$, **NO EXISTE**.

Una explicación geométrica, a partir de las sucesiones de valores tomados por la izquierda y derecha de $x = 1$, se da a partir de la Figura 3.4.

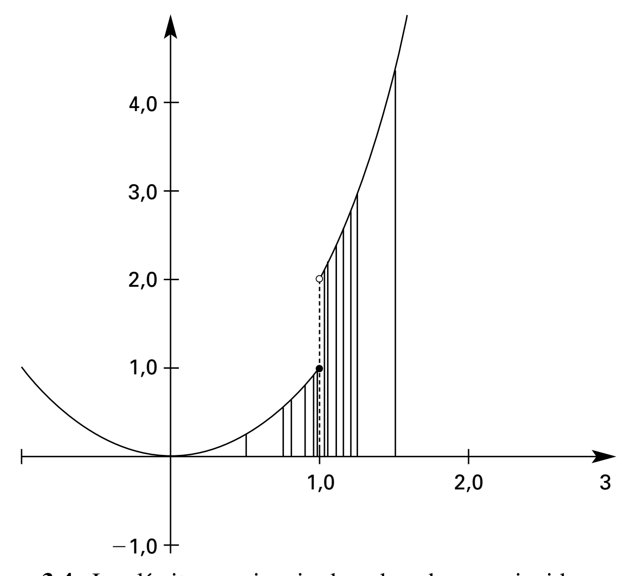


FIGURA 3.4. Los límites por izquierda y derecha no coinciden para $f(x)$.

Por un lado, el *hueco* señalado en las coordenadas (1, 2), indica que en $x = 1$ la función $f(x)$ no está definida, puesto que este valor no se encuentra en el dominio de $f_2 = x^3 + 1$. En cambio, el punto *relleno* de color negro, de coordenadas (1, 1), indica lo contrario, es decir, que en $x = 1$ la función $f(x)$ existe, puesto que existe para $f_1 = x^2$.

Por otro lado, se aprecia cómo los segmentos de recta, que simulan las ordenadas de de cada función, tienden a acumularse por la izquierda y por la derecha en el punto $x = 1$. No obstante, en este punto existe un *salto* entre una función y otra, que no permite que estas permanezcan juntas o *pegadas* una con otra. Por esta razón, el límite entre ambas, en el punto en cuestión, es diferente.

EJEMPLO 4

Dada la grafica de la función trascendental de la figura 3.5, se pide verificar la existencia de los siguientes límites: 1) $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)$, 2) $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$, 3) $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$, 4) $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$, 5) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$, 6) $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)$, 7) $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)$, 8) $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$, 9) $\lim\limits_{x\to 4^-} f(x)$, 10) $\lim\limits_{x\to 4^+} f(x)$, 11) $\lim\limits_{x\to 4} f(x)$, 12) $\lim\limits_{x\to 5^-} f(x)$, 13) $\lim\limits_{x\to 5^+} f(x)$, 14) $\lim\limits_{x\to 5} f(x)$.

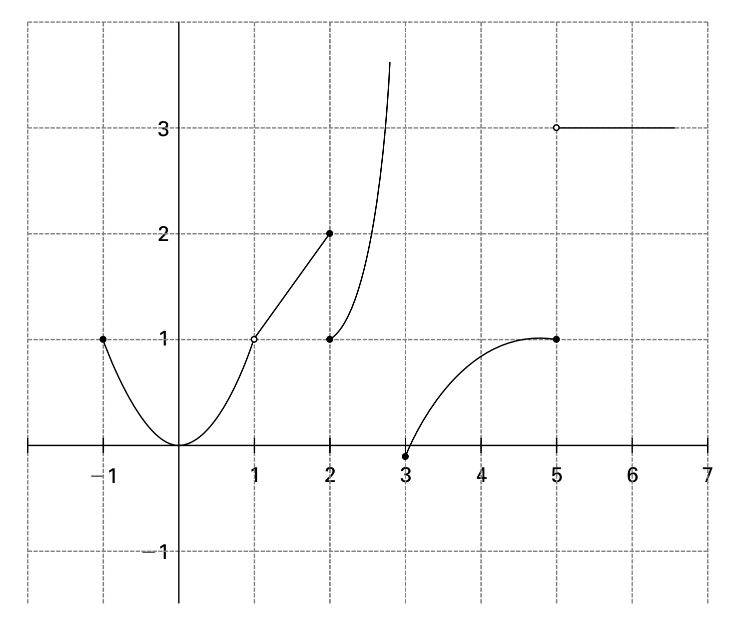


FIGURA 3.5. Función trascendental discontinua.

SOLUCIÓN:

La manera de determinar los límites que se piden es a través de dibujar las ordenadas correspondientes, por la izquierda y por la derecha de cada valor sugerido, viendo si la sucesión de ordenadas convergen hacia el propio valor.

1. $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = 1$

8. $\lim\limits_{x\to 3} f(x) =$ No existe

2. $\lim_{x \to 1^+} f(x) =$ No existe
3. $\lim_{x \to 2^-} f(x) = 2$
4. $\lim_{x \to 2^+} f(x) = 1$
5. $\lim_{x \to 2} f(x) =$ No existe
6. $\lim_{x \to 3^-} f(x) =$ No existe
7. $\lim_{x \to 3^+} f(x) = -0{,}1$
9. $\lim_{x \to 4^-} f(x) = 1$
10. $\lim_{x \to 4^+} f(x) = 1$
11. $\lim_{x \to 4} f(x) = 1$
12. $\lim_{x \to 5^-} f(x) = 0{,}95$
13. $\lim_{x \to 5^+} f(x) = 3$
14. $\lim_{x \to 5} f(x) =$ No existe

En el caso del $\lim_{x \to 3^-} f(x)$, la no existencia se afirma diciendo que el límite de la sucesión de las *y tiende a infinito*. En los otros casos de no existencia, las gráficas presentan *saltos* que no dejan que ello ocurra.

No obstante, la definición a partir de sucesiones del límite de una función, envuelve un sentido de relación preciso al decir que las sucesiones de valores de x (por la izquierda y por la derecha) tienen por último valor al número a, y en consecuencia la sucesión de valores de y tienen por límite al número L, lo cual escribimos como: $\lim_{x\to a} f(x) = L$, y sugiere $f(a) = L$. Esta última afirmación es válida para funciones en las que $x = a$ pertenece al dominio de $f(x)$. Por ejemplo, el límite: $\lim_{x\to 5} \sqrt{x-1} = 2$, es verdadero puesto que D_f: $x \geq 1$, el cual incluye a $x = 5$, y $f(5) = 2$.

Pero esto último no es suficiente en otros casos donde $x = a$ no se encuentra en el dominio de $f(x)$, bastará con un contraejemplo.

En el límite: $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^2-4}{x-2}$, si hacemos $f(2) = \dfrac{2^2-4}{2-2} = \dfrac{0}{0}$, operación en la que la división por cero no determina un número real, y no deja usarle para calcular el lími-

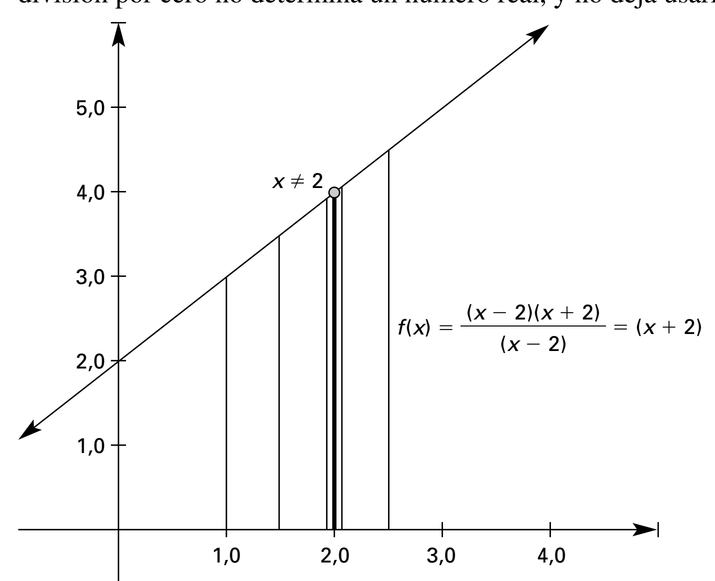


FIGURA 3.6. No obstante que en $x = 2$ la función no está definida, el límite cuando x tiende a 2 existe, y es 4.

TABLA 3.3

x	y
…	…
↓	↓
1	3
1,5	3,5
1,9	3,9
1,99	3,99
2	4
2,01	4,01
2,1	4,1
2,5	4,5
Ÿ	…
↑	↑

te de la sucesión de valores en y. Obsérvese, sin embargo, que: $x \neq 2$, ya que D_f: $\mathbb{R} - \{2\}$. De aquí que podamos hacer:

$$\lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)} \underset{x \neq 2}{=} \lim_{x \to 2} (x+2) \underset{x \neq 2}{=} (2+2) \underset{x \neq 2}{=} 4$$

Lo que prueba que el límite de las sucesiones de y es 4, cuando el último término de las sucesiones de x es 2. No obstante, que 2 no se encuentra en el dominio de $f(x)$. Esto último se hace patente en el proceso de cálculo del límite al ir afirmando bajo el signo $\neq$ (léase *distinto de*) que $x \neq 2$. La Tabla 3.3 de la página anterior, deja ver el proceso de aproximación de las sucesiones correspondientes.

Geométricamente, se puede observar, en la Figura 3.6, cómo las ordenadas de la función, así reducida: $f(x) = \dfrac{(x-2)(x+2)}{(x-2)} \underset{x \neq 2}{=} (x+2)$, tienden acumularse en el punpunto de coordenadas (2, 4) toda vez que la sucesión de valores de y convergen a 4; no obstante que en el punto (2, 4) la función no está definida, obsérvese el hueco.

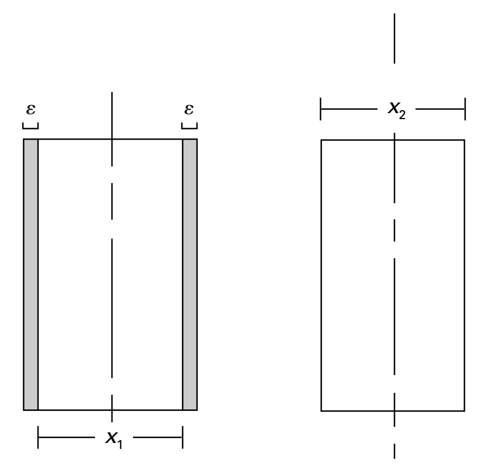
3.3. EL LÍMITE COMO UNA TOLERANCIA

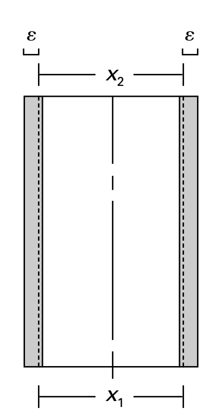
Siguiendo con la idea del ejemplo inicial, la diferencia entre el último valor, es decir, 1.4142, que tomamos de la sucesión de valores de x (por la izquierda), siendo el límite de la sucesión $a = \sqrt{2}$, es del orden de $|\sqrt{2} - 1{,}4142| = 0{,}00001$. En tanto que la diferencia entre el último valor de la sucesión de las y, 1,99996164, y el valor límite $L = 2$, resulta de $|2 - 1{,}99996164| = 0{,}00004$. Tanto la diferencia a la que se llega por el lado de las x, como la que obtuvimos, 0,00004, por las y, son magnitudes que obstaculizan para *llegar* al valor del límite de las sucesiones correspondientes. No obstante, la cercanía en ambos casos entre los valores aproximados y los límites de cada sucesión, aseguran con certeza su existencia, puesto que las diferencias son poco significativas y no se *salen* de un cierto margen. Es claro que entre más pequeñas sean las diferencias, en ambos casos, más se asegura que el valor límite se encuentre entre ellas.

En la práctica estos valores son semejantes a la *tolerancia,* o mejor, a los llamados *límites de tolerancia* que se utilizan en los procesos que llevan a la solución de problemas de ingeniería. Por ejemplo, en la ingeniería industrial, en el ensamblaje de partes de un componente, se da siempre cierta *holgura* o tolerancia para que el ensamblaje se pueda realizar. En ingeniería civil, en el cálculo de resistencia de materiales, se conocen los *niveles de tolerancia*, o sea, los puntos de *ruptura* y de *saturación* de cualquier material en uso.

La Figura 3.7 muestra el diseño para el ensamblaje de dos partes de una misma componente de tamaño x_1. Las especificaciones que satisfacen la holgura o tolerancia, achuradas en la figura, entre las partes es de $\varepsilon = \pm 0{,}05$ de milímetro.

En este caso x_1 y x_2 son llamadas *dimensiones críticas* y se presupone que x_2 *tiende* a parecerse a x_1, lo cual en el embalaje no llega a ocurrir por razones que tienen que ver con la construcción de las partes. En la Figura 3.8 aparecen embaladas ambas componentes. La componente de magnitud x_2, con línea punteada, ha sido ensamblada *por exceso*, es decir $x_2 > x_1$, quedando dentro del margen de tolerancia ε, lo cual indica que fue construida respetando las especificaciones de diseño.





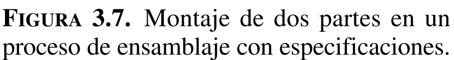

FIGURA 3.7. Montaje de dos partes en un proceso de ensamblaje con especificaciones.

FIGURA 3.8. Embalaje de ambas piezas.

3.4. LA DEFINICIÓN FORMAL DEL CONCEPTO DE LÍMITE (OPCIONAL)

De esta manera, y siguiendo con el ejemplo inicial, se acostumbra indicar las diferencias anteriores con símbolos como δ (*delta*) quien define la tolerancia para el último término de las sucesiones en x, y ε (*épsilon*) para la tolerancia correspondiente al límite de la sucesiones en y. Podemos decir que la tolerancia en x son todos los valores incluidos en el intervalo abierto $a - \delta < x < a + \delta$, en el cual x no necesariamente toma el valor de a, lo cual escribiremos como $x \neq a$ por lo dicho en la proposición [3-6]. En tanto los valores de $f(x)$ están comprendidos en el intervalo $L - \varepsilon <$ $< f(x) < L + \varepsilon$, lo cual nos permite afirmar que L es el límite de $f(x)$ cuando x se aproxima a a. En este sentido, las cantidades épsilon y delta son en realidad valores tolerables que justifican la existencia del límite de una función.

De hecho, la función f PUEDE NO ESTAR definida en a, o bien a no estar en el dominio de f. Esto último es la razón por la cual decimos que x, *solamente, se aproxima a «a»*, lo cual NO SIGNIFICA que no se llegue a dicho valor.

El tamaño de las tolerancias 2ε y 2δ aparece en la gráfica de la Figura 3.9.

Por otro lado, obsérvese que las desigualdades $a - \delta < x < a + \delta$ y $L - \varepsilon <$ $< f(x) < L + \varepsilon$, pueden también escribirse como $0 < |x - a| < \delta$ y $|f(x) - L| < \varepsilon$, respectivamente, al hacer uso de las propiedades de valor absoluto para las desigualdades, vistas en la proposición [1-15] del primer capítulo.

Desde este punto de vista, estudiemos la variación de la función $f(x) = x^2$ cuando la sucesión de valores de x se aproxima ilimitadamente al valor fijo $\sqrt{2}$, y los valores de y tienen por límite al valor fijo 2, o bien que $\lim_{x \to \sqrt{2}} x^2 = 2$. En este sentido, será suficiente con probar que los valores de la función, en magnitud absoluta, se pueden hacer *tan pequeños como se desee*, menores a una tolerancia que especifiquemos, un número positivo ε: $L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$, siempre y cuando los valores del dominio de

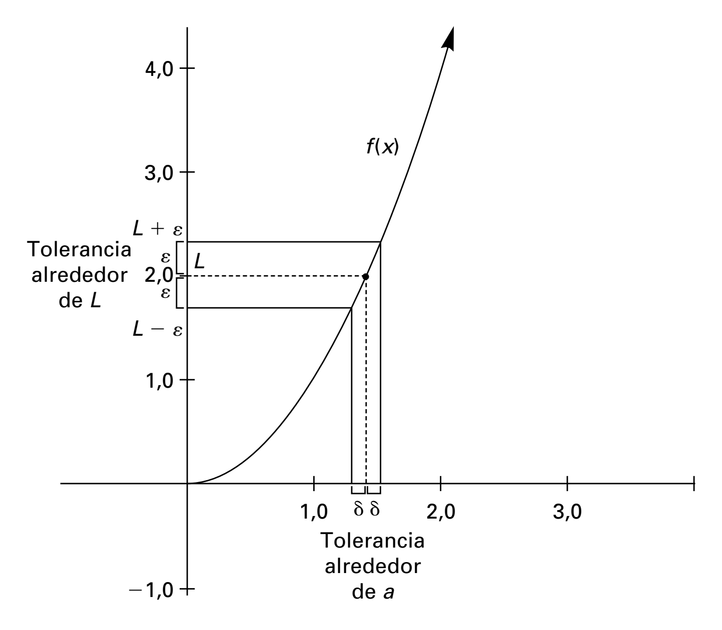


FIGURA 3.9. Tolerancias formadas alrededor de $x = a$.

x se encuentren lo suficientemente próximos de $\sqrt{2}$, es decir, si se encuentran dentro de la tolerancia: $\sqrt{2} - \delta < x < \sqrt{2} + \delta$. Para el caso, supongamos el valor de la tolerancia en y como aquel que obtuvimos anteriormente entre el penúltimo término de la sucesión en y con L como $\varepsilon = 0{,}00004$. La prueba es la siguiente:

Siendo que:

$$2 - \varepsilon < x^2 < 2 + \varepsilon$$

Puesto que:

$$L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$$

Sacando raíz:

$$\sqrt{2 - \varepsilon} < x < \sqrt{2 + \varepsilon}$$

Para $\varepsilon = 0{,}00004$, queda:

$$\sqrt{2 - 0{,}00004} < x < \sqrt{2 + 0{,}00003}$$

Es decir:

$$\sqrt{1{,}99997} < x < \sqrt{2{,}000004}$$

O bien:

$$1{,}4142 < x < 1{,}4143$$

Finalmente, si determinamos las diferencias:

$$\sqrt{2} - 1{,}4142 < x < \sqrt{2} - 1{,}4143$$

De aquí que la tolerancia en x sea:

$$|x - \sqrt{2}| < 0{,}00001$$

De ello se deduce que:

$$\delta = 0{,}00001$$

Lo cual nos da por resultado, además:

$$\delta = \frac{\varepsilon}{4}$$

En tanto es cierto que:

$$\lim_{x \to \sqrt{2}} x^2 = 2$$

En conclusión, podemos decir que para probar la veracidad de la proposición $\lim_{x \to \sqrt{2}} x^2 = 2$, no es necesario escribir las sucesiones de números cercanos a los límites correspondientes; para x e y basta solamente con dar una tolerancia ε, con la cual podamos determinar la correspondiente tolerancia δ, las cuales *encierran* dando existencia al valor del límite buscado, toda vez que δ es en mutua relación con ε.

De esto último se desprende lo que se conoce como definición *formal* o *rigurosa* del concepto de límite:

El número L *se llama límite de la función* f(x) *para la sucesión de valores de* x *tendiendo al valor* a*, si a partir de fijar la tolerancia positiva* $\varepsilon > 0$ *podemos determinar una tolerancia* $\delta > 0$ *(*δ *es en mutua relación con* ε*). De modo que si* $0 < |x - a| < \delta$ *tengamos que* $|f(x) - L| < \varepsilon$*. Donde* f *está definida para todos los valores de* x *cercanos a «a», con la posible excepción de* x = a.

[3-6]

Si se hace difícil entenderlo, puede ser escrito como la proposición [3-3], es decir: $\lim_{x \to a} f(x) = L$, o bien $f(x) \to L$: $(x \to a)$.

La forma, del todo analítica, no numérica, mediante la cual se demuestra el límite de una función, se presenta en el siguiente ejemplo y no es un requisito aprenderse el rigor del procedimiento, en todo caso es igual de valioso usar la proposición [3-3].

EJEMPLO 1

Demuestre que $\lim_{x \to 3} 4x = 12$, probando que para la tolerancia $\varepsilon > 0$ existe la tolerancia δ, de modo que $|x - 3| < \delta \to |4x - 12| < \varepsilon$.

SOLUCIÓN:

Como $|4x - 12| = 4|x - 3|$, es evidente que:

$$|x - 3| < \frac{\varepsilon}{4} \Rightarrow |4x - 12| < \varepsilon$$

Por tanto, se puede tomar $\delta = \dfrac{\varepsilon}{4}$. Sin embargo, las demostraciones se complican para límites de funciones más complejas.

Generalicemos en un solo ejemplo la información anterior (aclaramos que más adelante simplificaremos el trabajo algorítmico, para hacer más rápidas y sencillas las pruebas).

EJEMPLO 2

Pruébese la veracidad o falsedad de la siguiente proposición: $\lim_{x \to 2} 4x^3 - 1 = 31$, fijando una tolerancia $\varepsilon = 0{,}001$.

SOLUCIÓN:

1. Lo que se pide es estudiar la variación de la función $f(x) = 4x^3 - 1$, cuando la sucesión de valores de x se aproxima ilimitadamente al valor fijo $x = 2$, es decir, la sucesión tiende a 2.
2. En este caso la función: $f(x) = 4x^3 - 1$, tiene por dominio todos los reales $\mathbb{R}$.
3. Se puede tender a 2 tomando sucesiones por la izquierda y por la derecha de ese valor, por ejemplo: 1,5, 1,9, 1,99, 1,999, o bien 2,2, 2,01, 2,001. La Tabla 3.2 nos muestra que los valores de las sucesiones de y, (por arriba y abajo) tienden, efectivamente, al número 31.

TABLA 3.2

x	1,5	1,9	1,99	1,999	2	2,001	2,01	2,2
y	12,5	26,43	30,52	30,95	31	31,04	31,48	41,59

4. Lo anterior es sencillo de probar si hacemos la evaluación $f(2) = 4(2)^3 - 1$, puesto que obtenemos por resultado $f(2) = 31$. Lo cual indica que cuando el último valor de las sucesiones de x por la izquierda es 2, el último valor, o bien el límite, de las sucesiones de y es $L = 31$. Hasta aquí bastaría con el resultado; para demostrar que ello es cierto se tiene que hacer el procedimiento siguiente:

a) Vamos a demostrar que los valores de la función se diferencian muy poco del número 31, solamente si a x le damos una tolerancia lo suficientemente cercana a 2, en este caso $\varepsilon = 0{,}001$.

b) Deseamos que se cumpla que:

$$|f(x) - 31| < 0{,}0001 \text{ para } |x - 2| < \delta$$

O sea:

$$|(4x^3 - 1) - 31| < 0{,}001$$

Usando la proposición [1-15]:

$$-0{,}001 < (4x^3 - 1) - 31 < 0{,}001$$

Sumando 31:

$$31 - 0{,}001 < 4x^3 - 1 < 31 + 0{,}001$$

O bien:

$$31{,}999 < 4x^3 - 1 < 31{,}001$$

Sumando 1:

$$31{,}999 + 1 < 4x^3 < 31{,}001 + 1$$

Dividiendo por 4:

$$7{,}99975 < x^3 < 8{,}00025$$

Sacando raíz cúbica:

$$1{,}99998 < x < 2{,}00002$$

Y puesto que $a = 2$:

$$1{,}99998 - 2 < x - 2 < 2{,}00002 - 2$$

Resulta que:

$$-0{,}00002 < x - 2 < 0{,}00002$$

O bien:

$$|x - 2| < 0{,}00002$$

Por lo tanto, es suficiente disponer de la tolerancia $\delta = 0{,}00002$, para asegurar que la proposición: $\lim_{x \to 2} 4x^3 - 1 = 31$ es cierta, puesto que tanto $\delta = 0{,}00002$, como $\varepsilon = 0{,}001$ son lo suficientemente pequeños. Además, dado que $\varepsilon = 0{,}001$ y $\delta = 0{,}00002$, podemos decir que estos valores están en relación como: $\delta = \dfrac{\varepsilon}{50}$.

EJEMPLO 3

Probemos, a partir de la proposición [3-6] que el límite $\lim_{x \to 1} f(x)$, para

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 1 \\ x^3 + 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

vista en el ejemplo 3 del parágrafo anterior, no existe.

SOLUCIÓN:

La gráfica de la Figura 3.10 será fundamental para la explicación:

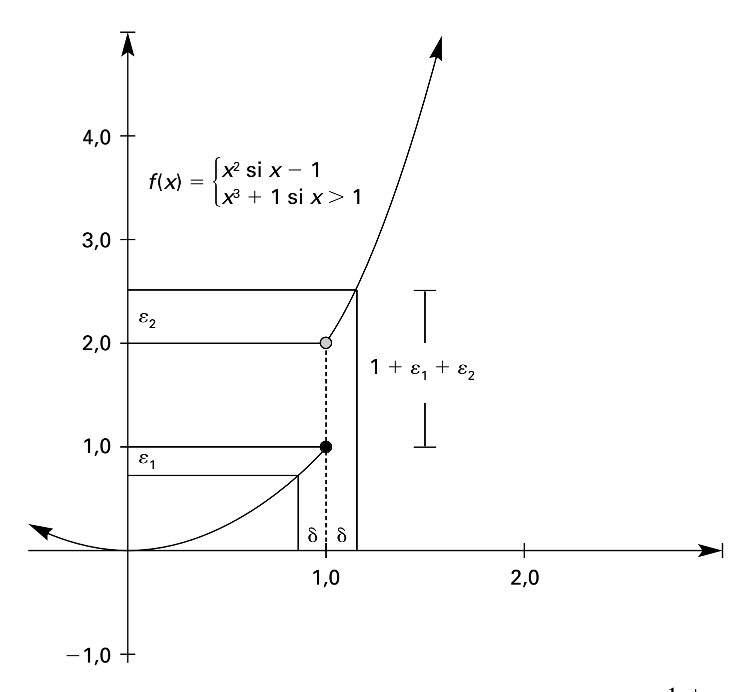


FIGURA 3.10. La gráfica tiene un salto en x = 1 pues, $|f(x) - L| = \dfrac{1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2}$.

1. El dominio de cada función permite hacer solamente un uso parcial de la tolerancia $a - \delta < x < a + \delta$. En el caso de $f_1 = x^2$ solo es válido tomar la parte izquierda $a - \delta < x$, puesto que D_{f_1}: $(-\infty, 1]$. En tanto que para $f_2 = x^3$ lo es la otra parte $x > a + \delta$, ya que D_{f_2}: $(1, \infty]$. . Si el uso parcial de la tolerancia $a - \delta <$ $< x < a + \delta$ fuera posible, tendríamos que:
2. Para $f_1 = x^2$ y $a - \delta < x$: $-\varepsilon < f(x) - L$, en tanto que para $f_2 = x^3$ con $x > a + \delta$: $f(x) - L < \varepsilon$. No obstante, y debido a que ambas funciones son diferentes, los valores que se obtienen de ε, a través de cada una de ellas, son también diferentes. En el caso de f_1 se tiene un valor ε_1 y para f_2: ε_2, tal como se aprecia en la gráfica de la Figura 3.8.
3. Esto trae como consecuencia que la tolerancia alrededor de $a = 1$ sea 2δ, en tanto que alrededor de $L = 2$ sea $1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2$. En este caso,

$$|f(x) - L| = \frac{1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2}$$

lo cual deja ver que $|f(x) - L| > \varepsilon$, lo cual contradice la proposición [3-6] que afirma que $|f(x) - L| < \varepsilon$. Consecuentemente, el $\lim_{x \to 1} f(x)$ para la función dada, no existe.

3.4.1. VERSIÓN CORTA

En procesos como el anterior, el trabajo algorítmico se reduce sustancialmente cuando se toman solamente los penúltimos valores de las sucesiones a través de proponer los valores de ε o δ. Veamos esto a través de una *versión corta*, con el siguiente ejemplo:

EJEMPLO 4

Determinar y probar el valor de $\lim\limits_{x \to 1} \sqrt{4x^3 - 3}$.

SOLUCIÓN:

1. Puesto que $\lim\limits_{x \to 1} \sqrt{4x^3 - 3}$ tiene por dominio: $x \geq \sqrt[3]{\dfrac{3}{4}} = 0{,}90858\ldots$ Como se puede ver este último incluye a $x = 1$, o último valor de la sucesión de las x, luego podemos hacer: $f(1) = \sqrt{4(1)^3 - 3} = 1$. De aquí que el límite buscado es $L = 1$.
2. Para probar lo anterior, diseñamos la Tabla 3.3, en la que hemos colocado solamente los penúltimos valores de las sucesiones, de suerte que evitemos el procedimiento *largo* de los ejemplos anteriores. Tomemos enseguida un valor para la tolerancia delta de $\delta = 0{,}001$, de manera que todo el trabajo se reduzca en calcular el valor para épsilon ε.

TABLA 3.3. El proceso para determinar ε es más rápido si se considera solamente el penúltimo valor de x.

x	Penúltimo valor de las sucesiones de x por la izquierda 0,999	Último valor de las sucesiones de x $a = 1$	Penúltimo valor de las sucesiones de x por la derecha 1,001	$\delta = 0{,}001$
y	Penúltimo valor de las sucesiones de y por la izquierda 0,994	Límite $L = 1$	Penúltimo valor de las sucesiones de y por la derecha 1,006	$\varepsilon = 0{,}006$

3. La tabla muestra cómo por izquierda y derecha las sucesiones de y convergen al límite $L = 1$. Por otro lado, es fácil reconocer el valor de $\varepsilon = 0{,}006$, al diferenciar el valor del límite L con cualquiera de los penúltimos valores de las sucesiones en y.
4. Podemos escribir lo anterior como:

$$\text{Si } |x - 1| < 0{,}001 \text{ entonces } |f(x) - 1| < 0{,}006$$

Además que $\delta = \dfrac{\varepsilon}{6}$, lo que conduce a afirmar la certeza de la proposición:

$$\lim_{x \to 1} \sqrt{4x^3 - 3} = 1$$

EJEMPLO 5

La tensión superficial de un producto químico, medida en una cierta escala, se da mediante la relación $s(x) = (3 + 0{,}005x)^2$, donde x es un componente del producto que se mueve en el dominio D_s: $2 \leq x \leq 4$. Si para la componente x, cercana a 3, se da una tolerancia $\delta = 0{,}005$, es decir $|x - 3| < 0{,}005$, se pide determinar la tolerancia ε para la tensión superficial $s(x)$ correspondiente.

SOLUCIÓN:

Para $x = 3$, $s(3) = (3 + 0{,}005(3))^2 = 9{,}09$.
De aquí que:

$$\lim_{x \to 3} (3 + 0{,}005x)^2 = 9{,}09$$

Luego, 9,09 es el valor de la tensión superficial para un valor de la componente x de 3.

Se pide determinar la tolerancia ε para el valor de esa tensión, es decir:

$$|s(x) - 9{,}09| < \varepsilon \to |x - 3| < 0{,}005$$

Dispongamos en una tabla los penúltimos valores de las sucesiones, como:

De la Tabla 3.4 deducimos fácilmente el valor de la tolerancia ε para la tensión superficial, este es $\varepsilon = 0{,}0001$. Tanto ε como δ están en la proporción: $\varepsilon = 0{,}02\delta$.

TABLA 3.4. Cálculo de ε a partir de $\delta = 0{,}005$.

x	2,995	3	3,005
$s(x)$	9,0901	9,0902	9,0903

ACTIVIDADES Y EJERCICIOS DE LAS SECCIONES 3.1 A 3.4

1. Calcule los siguientes límites verificando si el último valor de las sucesiones de x forma parte del dominio de $f(x)$, consecuentemente habrá que hacer $f(a) = L$, para con ello afirmar que $\lim_{x \to a} f(x) = L$, tal y como es sugerido en la proposición [3-3].

a) $\lim_{x \to 3} (3x^2 - 1)$

b) $\lim_{x \to -1} (x^3 + x)$

c) $\lim_{x \to 3} (x^2 - 4x - 5)$

d) $\lim_{x \to -\frac{1}{3}} (3x^2 + 5x - 2)$

e) $\lim_{x \to 2} (16x + 4x^2 - x^3)$

f) $\lim_{x \to 5} (x^5 - x^3)$

g) $\lim_{x \to 3} (3x^2 - 9x + 1)$

h) $\lim_{x \to 1} (x^3 - 3x^2 + 3x - 1)$

i) $\lim_{x \to -2} (x^2 - 2x + 4)$

j) $\lim_{x \to 0} x^2(x - 1)$

2. Dibuje la gráfica de las siguientes funciones y úsela para estimar los límites que se piden; en todos los casos hay que factorizar antes la función y eliminar, si ello es posible, la indeterminación:

a) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2 - 1}{x + 1}$

b) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$

c) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 - 6x + 9}{x - 3}$

d) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 + 2x - 8}{x - 2}$

e) $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{x^2 + 4x - 32}{x - 4}$

f) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{3x^2 + 2x - 5}{x - 1}$

g) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^4 - 16}{x - 2}$

h) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 + x - 2}{x^2 - 1}$

i) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{2x^2 - 3x - 2}{x^2 - 4}$

j) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 - x - 6}{5x^2 - 16x + 3}$

k) $\lim\limits_{x \to \frac{1}{4}} \dfrac{4x^2 + 3x - 1}{4x^2 - 13x + 3}$

l) $\lim\limits_{x \to -\frac{1}{2}} \dfrac{2x^2 - x - 1}{6x^2 + 7x + 2}$

3. Encuentre el valor de la tolerancia $\delta > 0$, si para $0 < |x - 2| < \delta$, entonces $|f(x) - L| < 0{,}001$. Para la prueba, haga uso de la *versión corta*.

a) $f(x) = 2x, L = 4$

b) $f(x) = 5x - 1, L = 9$

c) $f(x) = x^2 - 4, L = 0$

d) $f(x) = x^2 - 2x + 1, L = 1$

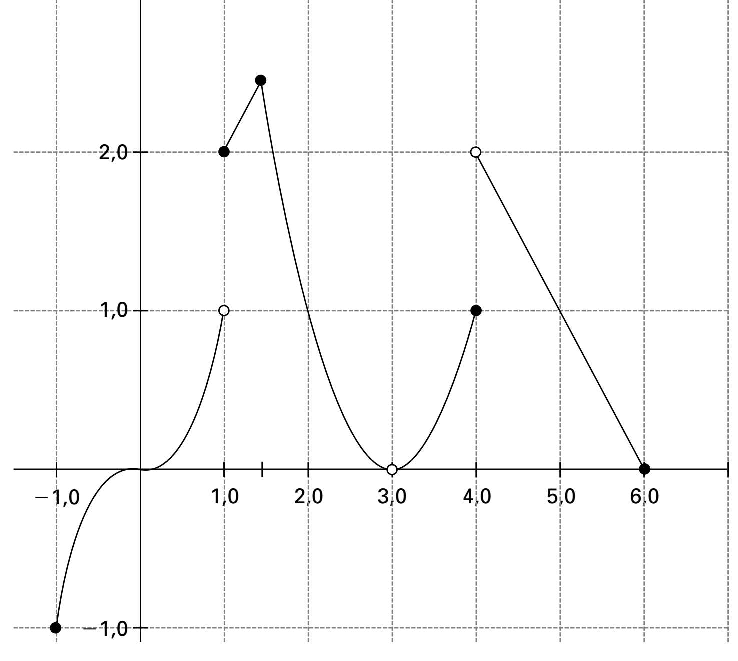
e) $f(x) = 2 - x, L = 0$

f) $f(x) = 3x + 2, L = 8$

g) $f(x) = x^3 - 4, L = 4$

h) $f(x) = \dfrac{1}{x}, L = \dfrac{1}{2}$

4. Dada la siguiente gráfica de una función trascendental, determine los límites que se piden.



a) $\lim_{x \to -1^-} f(x) =$

b) $\lim_{x \to -1^+} f(x) =$

c) $\lim_{x \to -1} f(x) =$

d) $\lim_{x \to 1^-} f(x) =$

e) $\lim_{x \to 1^+} f(x) =$

f) $\lim_{x \to 1} f(x) =$

g) $\lim_{x \to 1,43^-} f(x) =$

h) $\lim_{x \to 1,43^+} f(x) =$

i) $\lim_{x \to 1,43} f(x) =$

j) $\lim_{x \to 3^-} f(x) =$

j) $\lim_{x \to 3^+} f(x) =$

k) $\lim_{x \to 3} f(x) =$

l) $\lim_{x \to 4^-} f(x) =$

m) $\lim_{x \to 4^+} f(x) =$

n) $\lim_{x \to 4} f(x) =$

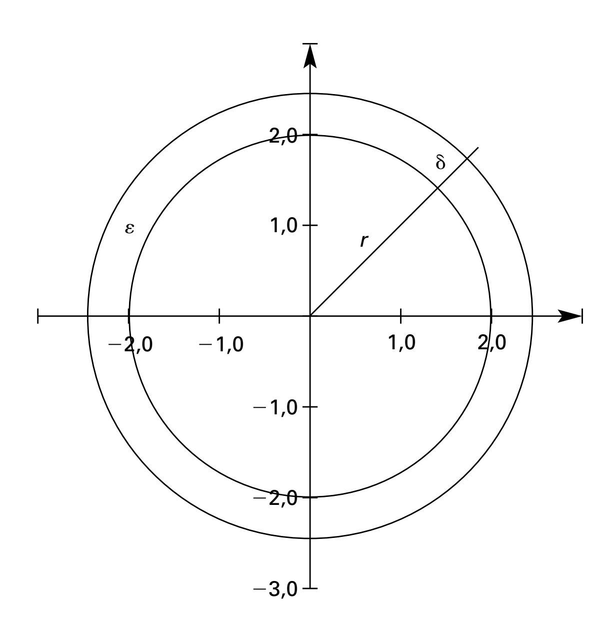
ñ) $\lim_{x \to 6^-} f(x) =$

ñ) $\lim_{x \to 6^+} f(x) =$

o) $\lim_{x \to 6} f(x) =$

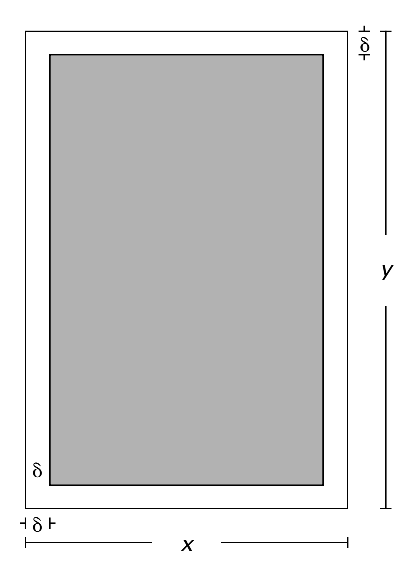
5. Determine las tolerancias y datos que se piden para los siguientes problemas.

a) El área circular de una placa de acero viene dada por la función $A(r) = \pi r^2$ en la que D_A: $0 \leq r \leq 20$, r en cm. La placa se calienta para su construcción (ver figura), de manera que se tolera δ unidades de exceso para el radio, consecuentemente el área debe adquirir una tolerancia ε. Determine:



1. Una fórmula para el área $A(r + \delta)$.
2. Si $r = 2$ con $\delta = 0{,}01$, calcule $A(r + \delta)$, haciendo uso de la fórmula obtenida en el paso anterior.
3. Si δ toma los valores $-0{,}005 < \delta < 0{,}005$. ¿Cuáles serán los valores ε tolerables de $A(r)$ cuando $r = 2$?

b) En tramos de papel fotográfico de área $xy = 37{,}5$ cm², se imprimen fotos, tal como se muestra en la figura.
Si se tolera para el ancho y alto un margen por defecto de $\delta = 0{,}01$ cm, para un valor de x de 4,5 cm, determine la tolerancia ε para el área $A(x)$ ocupada por la fotografía.



3.5. PROPIEDADES DE LOS LÍMITES

En la práctica del cálculo de límites, se hace un uso indistinto de la proposición [3-3], es decir:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

No obstante, hasta ahora hemos determinado límites haciendo uso de recursos gráficos y algorítmicos que nos llevaron, incluso, a probar su existencia. Esos resultados son expuestos en las siguientes *propiedades de los límites*. Solamente se demuestra la propiedad (3-7-1) (Véase ejemplo 2).

3-7. Si suponemos que $\lim_{x \to a} f(x) = L$ y $\lim_{x \to a} g(x) = M$. Luego:

1. $\lim_{x \to a} [f(x) \pm g(x)] = L \pm M = \lim_{x \to a} f(x) \pm \lim_{x \to a} g(x)$
2. $\lim_{x \to a} [f(x) \cdot g(x)] = L \cdot M = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x)$
3. $\lim_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{L}{M} = \dfrac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)}, M \neq 0$
4. $\lim_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{L} = \sqrt[n]{\lim_{x \to a} f(x)}, L > 0$

Para el cálculo de límites de funciones polinomiales precisamos de dos propiedades especiales; estas son:

5. Si $f(x) = c$, para todos los valores de x, con c una constante numérica real, entonces $\lim_{x \to a} f(x) = c$, para todo valor real a.

6. Si $f(x) = x$, para todos los valores de x, entonces $\lim\limits_{x \to a} f(x) = a$, para todo valor real a.
7. $\lim\limits_{x \to a} c \cdot f(x) = \lim\limits_{x \to a} c \cdot \lim\limits_{x \to a} f(x) = c \lim\limits_{x \to a} f(x)$, por la propiedad [3-7-2].

VERSIÓN CORTA DE LAS PROPIEDADES DE LOS LÍMITES

Siendo u y v funciones en x, así como a y c constantes:

(3-7-1) El límite de la suma o diferencia es la suma de los límites:

$$\lim_{x \to a} [u \pm v] = \lim_{x \to a} u \pm \lim_{x \to a} v$$

(3-7-2) El límite del producto es el producto de los límites:

$$\lim_{x \to a} [u \cdot v] = \lim_{x \to a} u \cdot \lim_{x \to a} v$$

(3-7-3) El límite del cociente es el cociente de los límites, en tanto que el denominador no puede ser cero:

$$\lim_{x \to a} \frac{u}{v} = \frac{\lim\limits_{x \to a} u}{\lim\limits_{x \to a} v}, \quad \lim_{x \to a} v \neq 0$$

(3-7-4) El límite de la raíz n-ésima es el límite, es la n-ésima raíz.

$$\lim_{x \to a} \sqrt[n]{u} = \sqrt[n]{\lim_{x \to a} u}, \quad \lim_{x \to a} u > 0$$

(3-7-5) El límite, cuando x se acerca a un valor a para $f(x) = c$, siendo c constante, es igual a la constante.

$$\lim_{x \to a} c = c$$

(3-7-6) El límite, cuando x se acerca a un valor a para $f(x) = x$, es igual al valor de a.

$$\lim_{x \to a} x = a$$

(3-7-7) El límite de una constante por una función es igual a la constante por el límite de la función:

$$\lim_{x \to a} c \cdot u = c \lim_{x \to a} u$$

Aún cuando ya determinamos algunos límites haciendo uso de la propiedad [3-3], resolvamos ejemplos en los que destaquemos el uso de las propiedades anteriores.

EJEMPLO 1

Calcular los siguientes límites, haciendo uso de las propiedades vistas.

a) $\lim_{x \to 3} (5x^3 - 3x + 1)$

b) $\lim_{x \to 3} \dfrac{x^2 - 9}{x - 3}$

SOLUCIÓN:

a) Siendo $\lim_{x \to 3} (5x^3 - 3x + 1)$ el procedimiento *estándar* sería el siguiente:
Haciendo uso de la propiedad [3-7-1]:

$$\lim_{x \to 3} 5x^3 + \lim_{x \to 3} (-3x) + \lim_{x \to 3} 1$$

Aplicando enseguida las propiedades [3-7-2] y [3-7-7]:

$$\lim_{x \to 3} 5 \cdot \lim_{x \to 3} x^3 - \lim_{x \to 3} 3 \cdot \lim_{x \to 3} x + \lim_{x \to 3} 1$$

Queda:

$$5(3)^3 - 3(3) + 1 = 127$$

Una manera *rápida* o expedita de llegar a este resultado sería pasar por alto las propiedades y evaluar directamente el último valor de las sucesiones en x en la función, por ejemplo:

$$\lim_{x \to 3} (5x^3 - 3x + 1) = 5(3)^3 - 3(3) + 1 = 127$$

b) Para calcular $\lim_{x \to 3} \dfrac{x^2 - 9}{x - 3}$, obsérvese que la función no está definida para $x = 3$, es decir $x \neq 3$. No obstante, nos interesa determinar el valor del límite de la función cuando $x \to 3$ aun cuando no esté definida para ese valor. Luego:

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = \lim_{x \to 3} \frac{(x + 3)(x - 3)}{x - 3} = \lim_{x \to 3} (x + 3)$$
$$= \lim_{x \to 1} x + \lim_{x \to 1} 3 = 1 + 3 = 4$$

Del ejemplo se desprende lo siguiente: Si $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios enteros y $P(a) \neq 0$ o $Q(a) \neq 0$, el límite de la fracción racional $\lim_{x \to a} \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ se halla directamente. En caso de que $P(a) = Q(a) = 0$, se recomienda simplificar la fracción $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, a través del binomio $x - a$ una o varias veces, como fue el caso anterior.

En los casos en que en $Q(a)$ persista la indeterminación haciéndose igual a cero, se dice que el límite no existe o bien que *tiende a infinito*, como veremos más adelante.

EJEMPLO 2

Demostrar la propiedad [3-7-1], es decir que

$$\lim_{x \to a} [f(x) + g(x)] = L + M = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x)$$

SOLUCIÓN:

Supongamos que los límites de cada función existen y son de la forma: $\lim_{x \to a} f(x) = L_1$ y $\lim_{x \to a} g(x) = L_2$, además de $s(x) = f(x) + g(x)$. De manera que se pide demostrar que:

$$\text{Si } |s(x) - (L_1 + L_2)| < \varepsilon, \text{ entonces } |x - a| < \delta$$

Haciendo uso de la versión corta vista en la sección 3.4.1, tendremos los penúltimos valores de las sucesiones en x e y en la forma en que se exhiben en la Tabla 3.5.

TABLA 3.5.

x	$a - \delta$	$x = a$	$a + \delta$
$f(x)$	$L_1 - \varepsilon_1$	L_1	$L_1 + \varepsilon_1$
$g(x)$	$L_2 - \varepsilon_2$	L_2	$L_2 + \varepsilon_2$

De ello, y por la proposición [3-6], se cumplen las siguientes propiedades para cada función:

$$|f(x) - L_1| < \varepsilon_1 \rightarrow |x - a| < \delta \quad (1)$$
$$|g(x) - L_2| < \varepsilon_2 \rightarrow |x - a| < \delta \quad (2)$$

Para (1) se guarda la proporción $\varepsilon_1 = n\delta$.
En tanto que para (2), se tiene $\varepsilon_2 = r\delta$. Donde n y r son números reales.
Pero, tanto (1) como (2) se pueden escribir respectivamente como:

$$-\varepsilon_1 < f(x) - L_1 < \varepsilon_1 \quad (3)$$
$$-\varepsilon_2 < g(x) - L_2 < \varepsilon_2 \quad (4)$$

Sumando ambas desigualdades, se tiene:

$$-(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) < f(x) + g(x) - (L_1 + L_2) < \varepsilon_1 + \varepsilon_2$$

La cual podemos reescribir de la siguiente manera:

$$|f(x) + g(x) - (L_1 + L_2)| < \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \quad (5)$$

Y puesto que:

$$\varepsilon_1 = n\delta \text{ y } \varepsilon_2 = r\delta$$

Escribimos (5) como:

$$|f(x) + g(x) - (L_1 + L_2)| < (n + r)\delta$$

Quedándonos:

$$\varepsilon = (n + r)\delta \text{ y } \delta = \frac{\varepsilon}{n + r}$$

Finalmente:

$$|s(x) - (L_1 + L_2)| < \varepsilon \rightarrow |x - a| < \delta$$

Lo cual se deseaba probar, toda vez que ello muestra la veracidad de la proposición (3-7-1), o sea que:

$$\lim_{x \to a} [f(x) + g(x)] = L + M = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x)$$

3.5.1. CÁLCULO DE LÍMITES DE FORMAS IRRACIONALES

En el cálculo de límites, las expresiones irracionales se reducen por lo general a una forma racional introduciendo una nueva variable.

EJEMPLO 1

Encontrar el límite $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1+x} - 1}{\sqrt[3]{1+x} - 1}$.

SOLUCIÓN:

La evaluación inmediata nos da una forma indeterminada cero entre cero: $f(0) = \dfrac{0}{0}$.
Para evitar esto último, probemos hacer $y^6 = 1 + x$ para intentar *romper* la indeterminación en el denominador, de modo que cuando $x \rightarrow 0$ $y \rightarrow 1$.

Sustituyendo los cambios respectivos, nos queda:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{\sqrt[3]{1+x} - 1} = \lim_{y \to 1} \frac{y^3 - 1}{y^2 - 1} = \lim_{y \to 1} \frac{(y-1)(y^2 + y + 1)}{(y+1)(y-1)}$$

O bien:

$$\lim_{y \to 1} \frac{y^2 + y + 1}{y + 1}$$

Aplicando el límite en esta última resulta:

$$\lim_{y \to 1} \frac{y^2 + y + 1}{y + 1} = \frac{3}{2}$$

La racionalización de una expresión racional se aplica a la parte de esta que contiene radicales.

Otro procedimiento para hallar el límite de una expresión racional, quizá el más común, es trasladar la parte irracional del numerador al denominador o, al contrario, del denominador al numerador, de manera que se *racionalice* la parte de la expresión que contiene radicales. Véase el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 2

Determinar el límite $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sqrt{x} - \sqrt{2}}{x - 2}$.

SOLUCIÓN:

El conjugado de la expresión $\sqrt{x} - 2$ es la misma expresión cambiada de signo, o sea: $\sqrt{x} + 2$.

La evaluación inmediata nos da una forma indeterminada cero entre cero: $f(0) = \dfrac{0}{0}$. Racionalicemos el numerador multiplicando numerador y denominador por el conjugado del primero, es decir, por $\sqrt{x} + 2$:

$$\lim_{x \to 2} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{2}}{x - 2} \cdot \frac{\sqrt{x} + \sqrt{2}}{\sqrt{x} + \sqrt{2}}$$

Quedando:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x - 2}{(x - 2)(\sqrt{x} + \sqrt{2})}$$

O bien

$$\lim_{x \to 2} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{2}}$$

Aplicando el valor del límite a esta última, queda:

$$\lim_{x \to 2} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

En la sección 5.3 del quinto capítulo, hemos definido la regla de L'Hôpital que se usa comúnmente en la solución de límites donde se persiste en las indeterminaciones de la forma $\dfrac{0}{0}$ e $\dfrac{\infty}{\infty}$.

ACTIVIDADES Y EJERCICIOS DE LA SECCIÓN 3.5

Use la *versión corta* de las propiedades de los límites para calcular los que enseguida se plantean; justifique cada paso sin omitir ninguno de ellos. En algunos de los problemas es necesario factorizar algunas expresiones para eliminar la división por cero que se presenta.

1. $\lim_{x \to 3} (2x^5 - 6x^4 + 8x - 1) =$

2. $\lim_{x \to 0} \left(\frac{x^2 + 4x + 4}{x + 2} \right) =$

3. $\lim_{x \to 1} \left(\frac{x^4 - 1}{x - 1} \right) =$

4. $\lim_{x \to 1} \left(\frac{x^2 + 2x - 3}{x - 1} \right) =$

5. $\lim_{x \to 3} \left(\frac{x^3 - 27}{x - 3} \right) =$

Factorice ambas expresiones.

6. $\lim_{x \to -2} \left(\frac{x^3 + 8}{x^2 - 4} \right) =$

Factorice ambas expresiones.

7. $\lim_{x \to 1} \left(\frac{1 - \sqrt{x}}{1 - x} \right) =$

Racionalice el numerador.

8. $\lim_{x \to 1} \sqrt{x^3 + 5x^2 - 3x + 2} =$

9. $\lim_{x \to 4} \sqrt{\frac{x^2 - 16}{x - 4}} =$

10. $\lim_{x \to -2} \sqrt{\frac{x^2 + 5x + 6}{4 - x^2}} =$

11. $\lim_{h \to 0} \frac{(x + h)^3 - x^3}{h} =$

Desarrolle el binomio y elimine x^3.

12. $\lim_{x \to -2} \frac{x^3 + 6x^2 + 11x + 6}{x^2 - 3x - 10} =$

Factorice ambas expresiones.

13. $\lim_{x \to -1} \frac{x^4 - 4x^2}{x^2 + x - 2} =$

14. $\lim_{x \to 3} \frac{x^3 + 3x^2 - 3x + 9}{x^4 + 12x^3 + 54x^2 + 108x + 81} =$

Factorice ambas expresiones.

15. $\lim_{x \to 3} \frac{\sqrt{x^2 + 5} + x}{\sqrt{x - 1}} =$

El cálculo es directo.

16. $\lim_{x \to 4} |x - 4|$

Recuerde que:

$$|x - 4| = \begin{cases} x - 4, & \text{si } x \geq 4 \\ -(x - 4), & \text{si } x < 4 \end{cases}$$

17. $\lim_{x \to 3} (5x + 3|x - 1|) =$

18. $\lim_{x \to \pi} \operatorname{sen} x =$

El cálculo es directo.

19. $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} (x + \cos x) =$

20. $\lim_{x \to 0} e^x =$

21. $\lim_{x \to 0} (e^{-x} \cos x) =$

22. $\lim_{x \to 1} \left(\frac{1}{1 - x} - \frac{3}{1 - x^3} \right) =$

Inicie estableciendo el común denominador de la expresión.

Ejercicios de la sección 3.5.2

1. $\lim_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}$

Pruebe con las siguientes opciones:

a) Hacer $y^2 = x$.

b) Racionalice el numerador multiplicando por el conjugado.

2. $\lim_{x \to 64} \dfrac{\sqrt{x} - 8}{\sqrt[3]{x} - 4}$

Haga $y^6 = x$.

3. $\lim_{x \to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt[4]{x} - 1}$

Haga $y^{12} = x$. Observe que se multiplicaron los denominadores de los grados de cada variable.

4. $\lim_{x \to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt[3]{x} + 1}{(x - 1)^2}$

Vea la expresión del numerador como una cuadrática en la forma:

$$\left(x^{\frac{1}{3}}\right)^2 - 2\left(x^{\frac{1}{3}}\right) + 1$$

y factorícelo usando la fórmula general.

5. $\lim_{x \to 3} \dfrac{2 - \sqrt{x - 3}}{x^2 - 49}$

Racionalice multiplicando por el conjugado del numerador.

6. $\lim_{x \to 8} \dfrac{x - 8}{\sqrt[3]{x} - 2}$

Resulta sencillo si se hace la división $x^{\frac{1}{3}} - 2\overline{)x - 8}$.

7. $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1 + x} - \sqrt{1 - x}}{x}$

8. $\lim_{h \to 0} \dfrac{\sqrt{x + h} - \sqrt{x}}{h}$

Racionalice el numerador multiplicando por su conjugado.

9. $\lim_{h \to 0} \dfrac{\sqrt[3]{x + h} - \sqrt[3]{x}}{h}$

10. $\lim_{x \to 3} \dfrac{\sqrt{x^2 - 2x + 6} - \sqrt{x^2 + 2x - 6}}{x^2 - 4x + 3}$

3.6. CONTINUIDAD DE FUNCIONES EN UN PUNTO

Veamos con el mismo ejemplo de la función cuadrática el concepto de continuidad de las funciones en un punto.

Recordemos que para calcular el valor de la función $f(x) = x^2$, para cuando el último valor de la sucesión de las x es $x = \sqrt{2}$, tomamos las aproximaciones: por la izquierda: $x = 1{,}4$, $1{,}41$, $1{,}414$, etc., y por la derecha: $x = 1{,}5$, $1{,}42$, $1{,}415$, etc., dando diferentes límites de tolerancia de acuerdo a la precisión que propusimos (la Tabla 3.2, vista en la sección 3.2, ayuda para entender esto último). En la gráfica de la Figura 3.11 se encuentran representadas algunas de las aproximaciones para llegar a los valores límites $x = \sqrt{2}$ e $y = 2$.

TABLA 3.2

x	$y = x^2$
…	…
1	1
1,,4	1,96
1,41	1,9881
1,414	1,999396
1,4142	1,99996164
↓	↓
$\sqrt{2}$	2
↑	↑
1,41423	2,0002
1,415	2,002
1,42	2,016
1,5	2,25
2	4
…	…

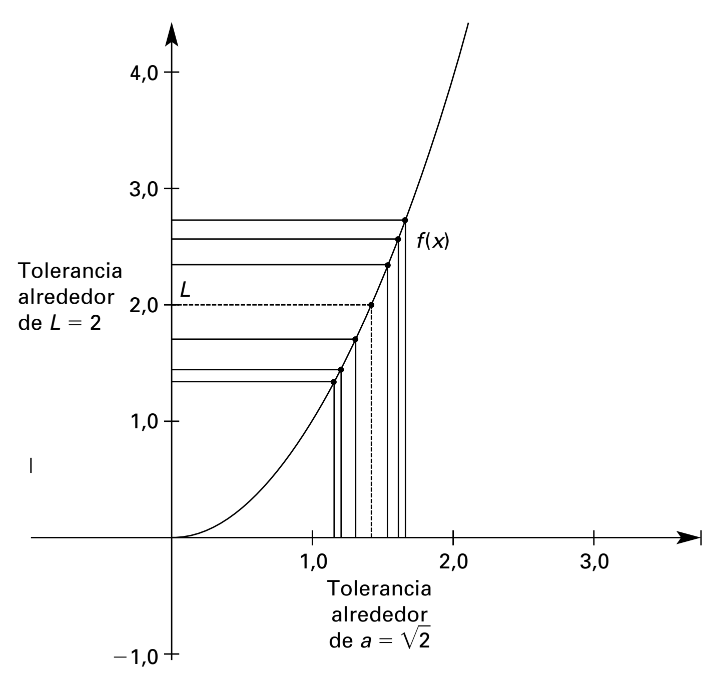


FIGURA 3.11. Tolerancias alrededor de $a = \sqrt{2}$.

Como se dijo anteriormente, las distancias entre las rectas paralelas, tanto en las sucesiones de valores de x como para las de y, pueden hacerse tan pequeñas como pequeñas sean las tolerancias tomadas, lo que permite ir acercándose a los valores límites. En este caso el punto de coordenadas $(\sqrt{2}, 2)$, que contiene los límites de ambas sucesiones, se encuentra situado en el penúltimo rectángulo que se forma con las tolerancias tomadas. Por tanto la función $f(x) = x^2$, en el punto $x = \sqrt{2}$, tiene el valor $f(\sqrt{2}) = 2$, que a su vez es su propio límite. Esta propiedad es la que determina la condición de continuidad de la función en un punto. Lo escribiremos de la siguiente manera:

> *Una función* f(x)*, se dice continua en un punto* x = a*, si el límite de la función en el punto* a *es igual al valor de la función en ese mismo punto, es decir, si* $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

[3-6-1]

Podemos ver esto último a través de las tolerancias (ε, δ) de la siguiente manera:

Puesto que la proposición [3-6-1], se determina a través de los valores tolerables señalados en la proposición [3-6], esto último puede escribirse como:

$$|f(x) - L| < \varepsilon \Rightarrow |x - a| < \delta$$

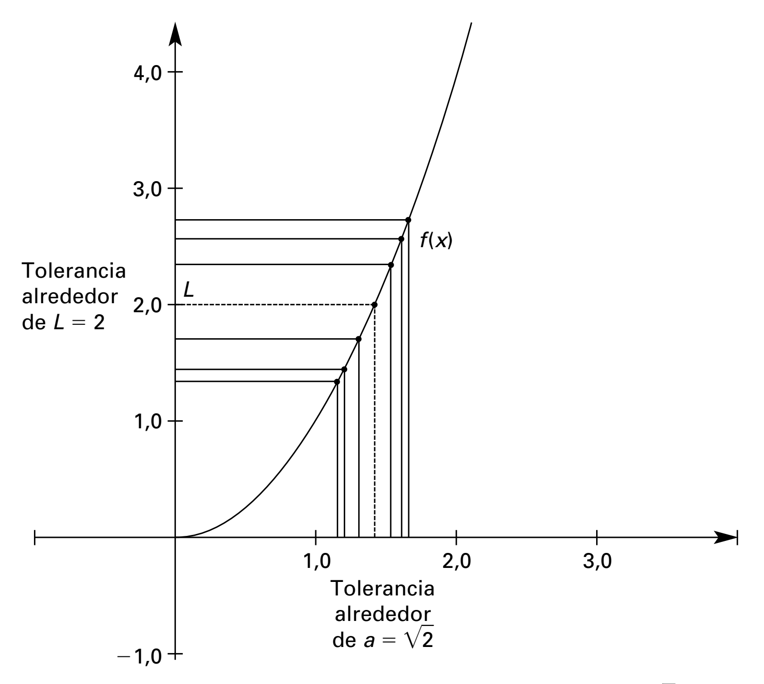


FIGURA 3.12. La función $f(x) = x^2$ es continua en $x = \sqrt{2}$.

O bien:

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon \Rightarrow |x - a| < \delta \qquad [3\text{-}6\text{-}2]$$

La proposición [3-6-2] delimita dos *tubos*, uno horizontal de base 2ε junto con las rectas:

$$f(x) = f(a) + \varepsilon \;\text{ y }\; f(x) = f(a) - \varepsilon$$

Y otro vertical de base 2δ delimitado por las rectas:

$$x = a + \delta \;\text{ y }\; x = a - \delta$$

Ello deja ver que todos los puntos de la gráfica que se concentran en el segundo tubo, se encuentran además en el primero (véase la gráfica de la Figura 3.12 y 3.13). Solamente en el caso de discontinuidad de la función en un punto, no se cumple esta condición.

La condición de continuidad [3-6-1] está sujeta a las tres proposiciones siguientes:

[3-6-2] El valor de la función $f(x)$, cuando $x = a$, es el número fijo $f(a)$. Esto significa que $x = a$ debe pertenecer al dominio de $f(x)$.

[3-6-3] Los límites laterales, por la izquierda y derecha de $x = a$, deben ser iguales, es decir se debe cumplir lo que se plantea en la proposición [3-4]: $\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x)$.

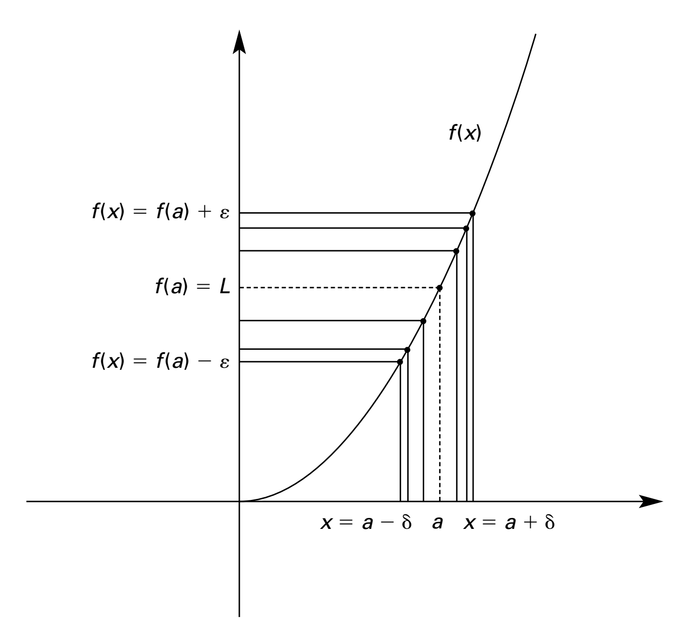


FIGURA 3-13. Tubo de base 2δ.

[3-6-4] En consecuencia: $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$, lo cual indica que $f(x)$ es continua en el punto $(a, f(a))$.

Además, de la proposición [3-6-1] se desprenden las siguientes:

[3-6-5] Una función polinomial es continua en todo su dominio, puesto que cumple con las condiciones que se plantean en las proposiciones [3-6-2], [3-6-3] y [3-6-4].

[3-6-6] Una función racional $\frac{P(x)}{Q(x)}$ es continua, a excepción de los valores numéricos que hacen cero el denominador. En este caso no se cumple con la proposición [3-6-2].

[3-6-7] Los puntos donde la función $f(x)$ es continua son llamados *puntos de continuidad*.

[3-6-8] La función $f(x)$ se dice continua en un segmento $[a, b]$ si es continua en cada punto del segmento, incluyendo a y b.

[3-6-9] Los puntos en los que no se cumple la condición de continuidad de $f(x)$ se llaman *puntos de discontinuidad*, en tales casos se dice que *la función* f(x) *es discontinua en ese (o esos) puntos*.

EJEMPLO 1

El polinomio $f(x) = 8x^5 + x^4 - 16x^3 + 3x - 1$, es continuo en todo su dominio, es decir, en todo $\mathbb{R}$, puesto que cumple con las proposiciones [3-6-2], [3-6-3] y [3-6-4].

EJEMPLO 2

La función $g(x) = \dfrac{x - 1}{x^2 - 4}$, es discontinua en $x = 2$ y $x = -2$. Observe que $g(2)$ y $g(-2)$ no están definidos, lo cual hace fallar la proposición [3-6-2].

3.6.1. DISCONTINUIDAD REMOVIBLE

Los casos en que se incurre en discontinuidad pueden consistir de los siguientes:

La discontinuidad que se aprecia en la Figura 3.14, es llamada *removible* debido a que es posible sustituir el punto *relleno* de coordenadas $(a, f(a))$ por el punto hueco que se encuentra en la gráfica.

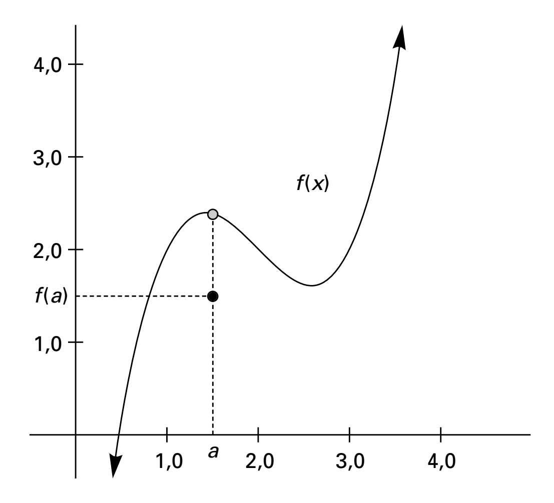


FIGURA 3.14. $\lim_{x \to a} f(x) \neq f(a)$.

En este caso, pareciera que el punto relleno $(a, f(a))$ se hubiera *caído* del lugar que ocupaba en la curva, aunque se puede dar el caso contrario, es decir, que el punto relleno este por encima de la curva.

La discontinuidad se presenta inmediata, debido a que el valor de $x = a$ no pertenece al dominio de la función $f(x)$, es decir, no se cumple con la proposición [3-6-1]: $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Casos de funciones que presentan discontinuidades de ese tipo son las expresiones trascendentes. Véase el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 3

Verifique si la siguiente función, es continua o discontinua en $x = 1$:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^4 - 1}{x - 1} & \text{si } x \neq 1 \\ 0 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

En caso de ser discontinua, como se percibe, vea la posibilidad de eliminar dicha discontinuidad.

SOLUCIÓN:

Puesto que la función es trascendente, lo mejor es dividir las funciones que le integran como sigue:

$$f_1 = \frac{x^4 - 1}{x - 1} \text{ para } x \neq 1 \text{ y } f_2 = 0 \text{ para } x = 1$$

(La gráfica aparece en la Figura 3.15). Es claro que $f(x)$ es discontinua en $x = 1$, puesto que la evaluación: $f_1(1) = \dfrac{1^4 - 1}{1 - 1}$ es indeterminada de la forma $\dfrac{0}{0}$, y $\lim\limits_{x \to 1} f_2 = 0$. Es decir ambos límites son distintos debido a que no se cumple con la proposición [3-6-1], o sea: $\lim\limits_{x \to a} f(x) \neq f(a)$, consecuentemente tampoco ocurre con la proposición [3-6-3], $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \lim\limits_{x \to a^-} f(x)$.

En el caso de f_1 la discontinuidad se puede evitar factorizando el numerador como:

$$f_1 = \frac{(x^2 - 1) \cdot (x^2 + 1)}{x - 1}$$

O sea:

$$f_1 = \frac{(x + 1) \cdot (x - 1) \cdot (x^2 + 1)}{x - 1} \underset{x \neq 1}{=} (x + 1) \cdot (x^2 + 1) \underset{x \neq 1}{=} x^3 + x^2 + x + 1$$

Si hacemos con este último resultado: $f_1(1) = 4$, podemos *remover* la discontinuidad al reescribir la función original como:

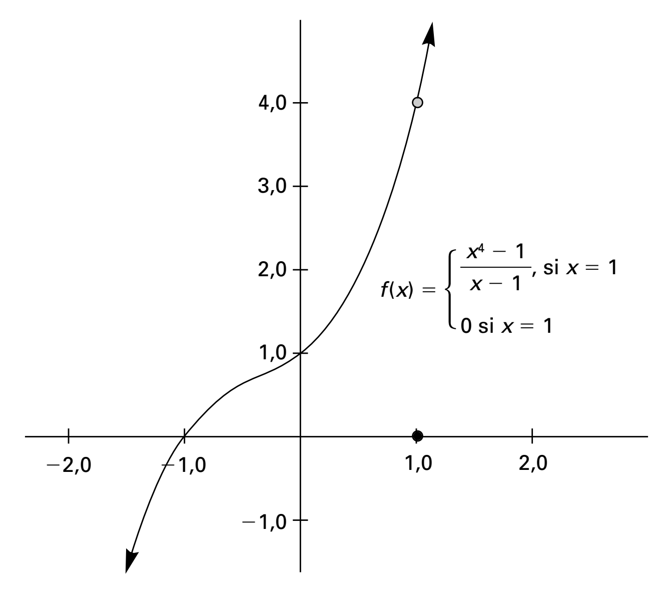


FIGURA 3.15. $\lim\limits_{x \to a} f(x) \neq f(a)$.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^4 - 1}{x - 1} & \text{si } x \neq 1 \\ 4 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

O bien:

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + x^2 + x + 1 & \text{si } x \neq 1 \\ 4 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

Esta última función es continua en $x = 1$.

3.6.2. DISCONTINUIDAD NO REMOVIBLE

Estos casos se presentan en expresiones racionales de la forma $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, para límites como $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, donde $Q(a) \neq 0$. Casos particulares se ven en funciones del tipo

$$f(x) = \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n}{x - a}$$

cuyo numerador se puede factorizar en $(x - a)$ eliminando con ello este factor del denominador. Véase el caso de la gráfica en la Figura 3.16.

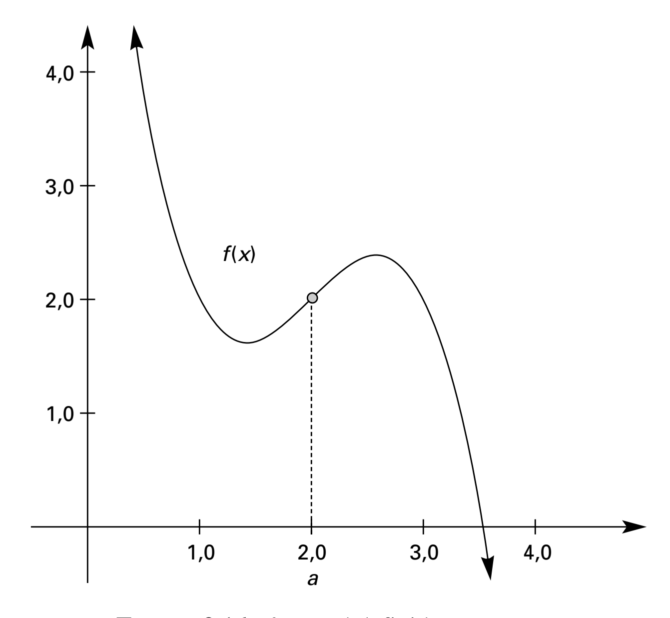


FIGURA 3.16. f no está definida para $x = a$.

EJEMPLO 4

Verifique el tipo de continuidad de la siguiente función:

$$f(x) = \frac{x^4 - 1}{x^2 - 1}$$

SOLUCIÓN:

Puesto que en la expresión dada x debe ser distinta de uno, o sea $x \neq 1$, es claro que la función no es continua en $x = 1$. Si factorizamos el numerador como:

$$f(x) = \frac{(x^2 - 1)(x^2 + 1)}{x^2 - 1}$$

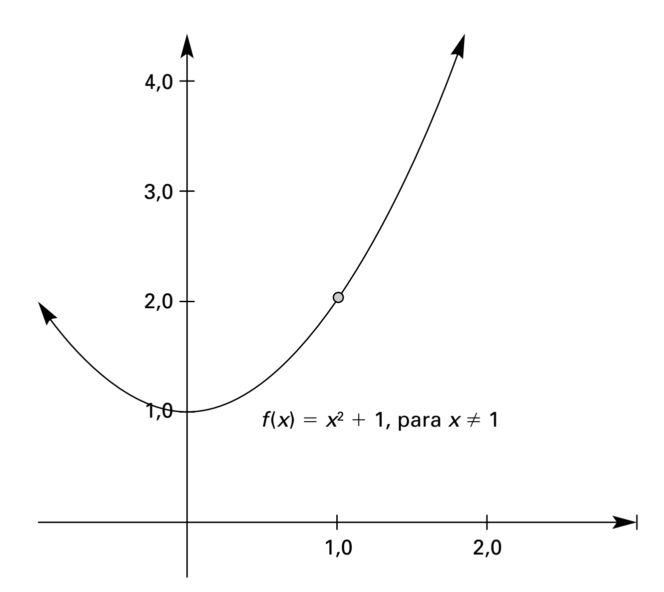


FIGURA 3.17. f no está definida para $x = 1$.

La expresión se reduce a:

$$f(x) = x^2 + 1, \text{ para } x \neq 1$$

No obstante que hemos reducido la expresión, esta última es discontinua en $x = 1$, puesto que no cumple con la proposición elemental [3-6-2] ($x = a$ debe pertenecer al dominio de $f(x)$), además de que no puede ser removida. Véase la gráfica de esta función en la Figura 3.17.

3.6.3. DISCONTINUIDAD DE SALTO

La discontinuidad de *salto* se presenta en funciones trascendentes semejantes a la que vimos en el ejemplo 1, discontinuidad *removible*, del tipo de la gráfica de la Figura

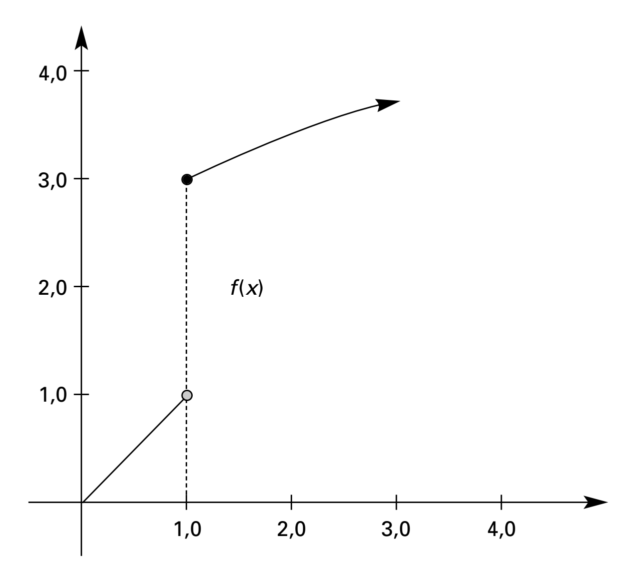


FIGURA 3.18. Los límites laterales $\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x)$ son diferentes.

3.18. En esta, la discontinuidad de salto en un punto $x = a$ pareciera ser muy obvia, puesto que ambas funciones se encuentran *despegadas* una de la otra en ese punto.

En todos los casos las proposiciones que entran en juego para la verificación de la discontinuidad, son las [3-6-2], [3-6-3] y [3-6-4]. De igual forma, es prudente dividir en dos funciones f_1 y f_2, o bien las que sean necesarias, a la función trascendente $f(x)$. Veamos esto último con un ejemplo.

EJEMPLO 5

Discuta la continuidad de la siguiente función en $x = 2$:

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{para } x \leq 2 \\ (x - 3)^2 & \text{para } x > 2 \end{cases}$$

SOLUCIÓN:

Hagamos $f_1 = x + 1$ para $x \leq 1$, reconociéndole como la función a la izquierda de $x = 2$, y $f_2 = (x - 3)^2$ para $x > 2$, como la función a la derecha de $x = 2$.

1. Apliquemos la propiedad [3-6-2] a cada una de estas: f_1 está definida para $x = 2$, aun cuando f_2 no lo está. De manera general podemos afirmar que $x = 2$ pertenece al dominio de $f(x)$.
2. Apliquemos la propiedad [3-6-3] a cada una de las funciones:

a) $\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} x + 1 = 3$

b) $\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} (x - 3)^2 = 1$

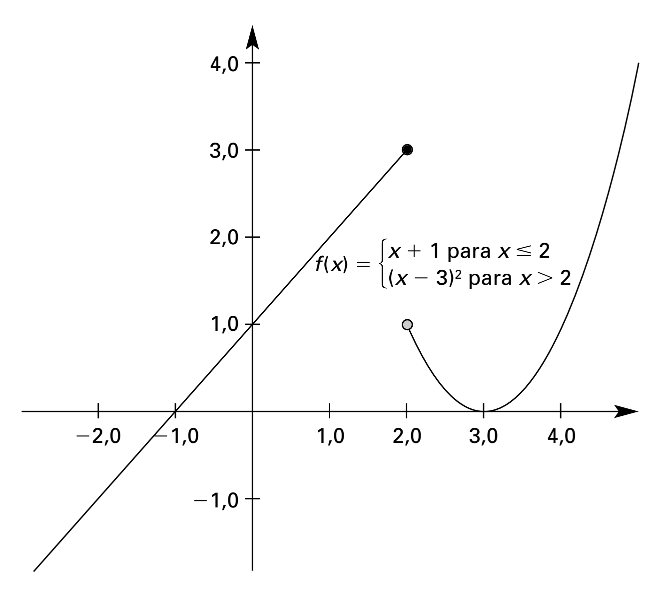


FIGURA 3.19. Salto en $x = 2$ para $f(x)$.

De esa aplicación se deduce que los límites laterales son distintos $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) \neq \neq \lim\limits_{x \to a^+} f(x)$, fallando el análisis de la función para la proposición [3-6-3], lo cual conduce a decidir que la función es discontinua en $x = 2$. La gráfica de la función $f(x)$ aparece en la Figura 3.19.

Si bien no es usual *eliminar* la discontinuidad de salto, ello es posible restando a f_1 dos unidades, o bien sumando a f_2 la misma cantidad.

EJEMPLO 6

Determine el valor de k para que la función:

$$f(x) = \begin{cases} kx + 1 & \text{para } x \leq 0 \\ x^2 - k & \text{para } x > 0 \end{cases}$$

Sea continua en $x = 0$.

SOLUCIÓN:

Para que la función $f(x)$ sea continua en $x = 0$, es necesario que ambas funciones $f_1 = kx + 1$ para $x \leq 0$, por la izquierda, y $f_2 = x^2 - k$ para $x > 0$, por la derecha, no se encuentren *despegadas* en ese punto, es decir, que no haya un salto entre ambas, y más bien estén *pegadas* en ese valor. Esto último se logra igualando ambas funciones en ese punto, puesto que solamente así las podemos pegar. Veamos:

$$kx + 1 = x^2 - k$$

Para $x = 0$, punto en el que queremos que se encuentren pegadas, se tiene:

$$k(0) + 1 = (0)^2 - k$$

De aquí se desprende que $k = -1$.
La función $f(x)$ será continua en $x = 0$, si la reescribimos a través de $k = -1$, como:

$$f(x) = \begin{cases} -x + 1 & \text{para } x \leq 0 \\ x^2 + 1 & \text{para } x > 0 \end{cases}$$

EJEMPLO 7

Evalué el siguiente límite: $\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$, para $f(x) = x^2 - x + 2$, o muestre si el límite existe.

SOLUCIÓN:

Puesto que $f(0) = (0)^2 - 0 + 2 = 2$, tenemos:

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2 - x + 2 - 2}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2 - x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{x(x - 1)}{x} =$$
$$= \lim_{x \to 0} (x - 1) = (0 - \ ) = -1$$

Luego el límite buscado existe y es -1.

3.7. LÍMITES AL INFINITO

3.7.1. DISCONTINUIDAD AL INFINITO

El estudio de los límites al infinito y límites infinitos, tiene como primer propósito el análisis de la variación de la gráfica de las funciones $f(x)$, aun cuando en el fondo se centra en el análisis de funciones racionales de la forma $\frac{P(x)}{Q(x)}$. En estos casos, la gráfica de la función se *pierde* al infinito, véase la gráfica de la Figura 3.20, al menos infinito, o bien sus ramas pueden dirigirse, una al infinito positivo y la otra al infinito negativo, tomando valores muy grandes, cuando nos acercamos al valor $x = a$.

En general, ese comportamiento de la gráfica se presenta en funciones racionales de la forma $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, o bien:

$$f(x) = \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n}{x - a}$$

en las cuales resulta infructuoso deshacerse del valor de $x - a$ en el denominador, de manera que siempre persiste la indeterminación.

De esta forma se dice que *el límite no existe* o bien es necesario convenir *que el límite es infinito* debido a que las ramas de la función toman valores reales M muy grandes cuando la sucesión de valores de x se aproximan o están muy cercanas al valor de a.

Hemos aceptado la *convención* de considerar el infinito como si fuera un número real, lo cual es falso, solamente para dejar ver que esta es una manera abstracta de ver lo finito. Al prescindir de los límites a que se sujeta lo finito, es posible que formemos conceptos de extensión infinita, duración infinita, etc. De manera general diremos que el infinito es el límite de cantidades o sucesiones finitas.

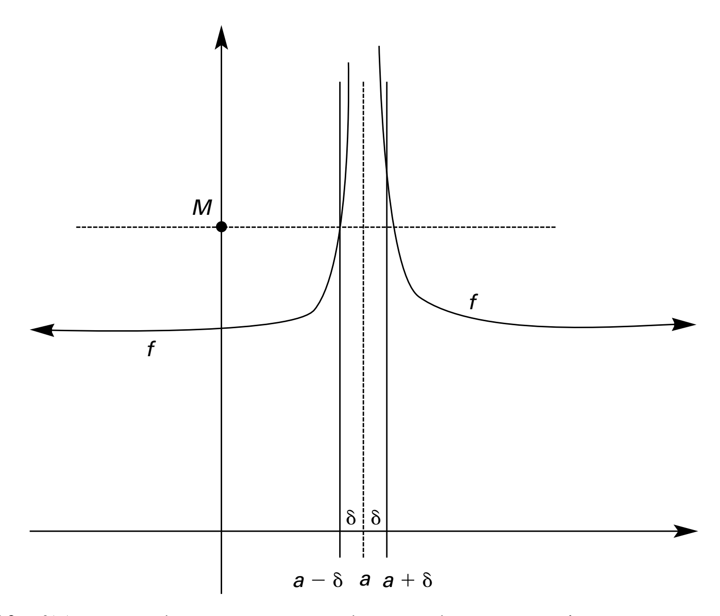


FIGURA 3.20. $f(x)$ toma valores M muy grandes cuando x se aproxima a a.

Lo anterior se puede definir como:

Siendo f *una función definida en un intervalo abierto que contiene a* a*, con excepción posible de esta última, en tanto* x *se acerque lo suficientemente a* a*,* f(x) *crece sin límite. Esto se escribe como:*

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty$$

Haciendo uso de las tolerancias δ *y* M*: Si para* δ *y* M *reales* M > *0 y* δ > *0:*

$$\text{Si } 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) > M$$

[3-7-1]

Geométricamente, la proposición [3-7-1] significa que si dibujamos una recta horizontal que pase por (0, M), entonces existe una tolerancia positiva δ, tal que, a excepción del punto $(a, f(a))$, contiene la porción de la gráfica entre $a - \delta$ y $a + \delta$ que se encuentra por arriba de la recta horizontal. Esto último sugiere que las ramas de la gráfica tienden a encerrarse dentro del *tubo* que determina la tolerancia δ, cuya base es

2δ, sin que se lleguen a salir del mismo, conduciéndose inevitablemente, sin límite, al infinito. La gráfica de la Figura 3.21 muestra una función del tipo $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ para un tubo de base con 2δ con $f(x) > M$ ($M = 10$), en la cual las ramas han rebasado la cota $y = 160$.

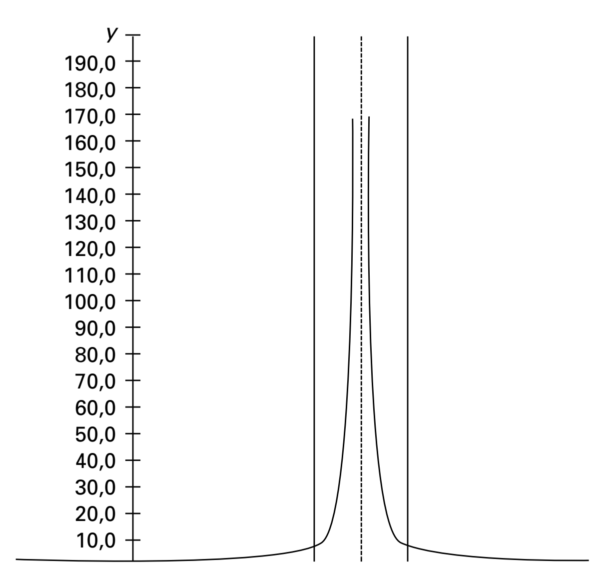


FIGURA 3.21. Tubo de base 2δ para $f(x) > M$.

De igual forma, las ramas de gráfica de la función tienden a replegase sobre la recta $x = a$, que les sirve de asíntota, tal como lo vimos en proposición [2-12]. No obstante, en todos los casos conviene analizar la función por izquierda y derecha para precisar en la orientación que toman las ramas.

Los resultados del modelo de tolerancias (δ, M) son valiosos por las siguientes consecuencias:

1. El *tubo* garantiza que las ramas de la gráfica no se salgan de la tolerancia especificada.
2. Las ramas de la gráfica se van plegando a la asíntota $x = a$, disminuyendo continuamente la distancia entre ellas haciéndose menor que 2δ y tendiendo a cero.
3. Las ramas crecen sin límite al infinito.
4. El *tubo* permite apreciar el comportamiento de la gráfica, es decir, su variación, más allá de M.

Describiremos los casos anteriores a partir de las siguientes dos proposiciones:

[3-7-1] Si $\lim_{x \to a^-} f(x) = \infty$ y $\lim_{x \to a^+} f(x) = \infty$ diremos que $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$. O bien el caso contrario: $\lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty$ y $\lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty$. Es decir: $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$.

[3-7-2] $\lim_{x \to a^-} f(x) = \infty$ y $\lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty$ o viceversa $\lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty$ y $\lim_{x \to a^+} f(x) = +\infty$.

EJEMPLO 1

Demuéstrese que $\lim_{x \to 0} \frac{a}{x} = \infty$, para a número real (en realidad se pide demostrar la proposición [3-7-2].

SOLUCIÓN:

(Para la demostración, véase la gráfica en la Figura 3.22.)

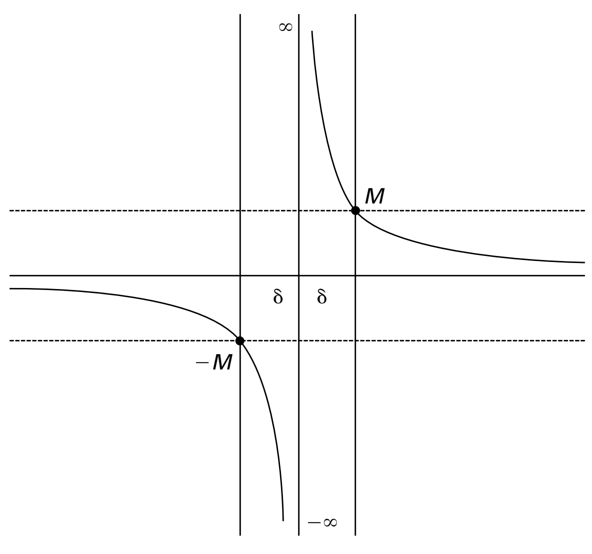


FIGURA 3.22. La gráfica muestra que $|x - 0| < \frac{1}{M} = \delta$.

Si a partir de $\delta > 0$ trazamos las paralelas que corresponden a la tolerancia M, construiremos el tubo sobre el que se alojan las ramas de la hipérbola.

Para ambas ramas se cumple que:

$$\left|\frac{a}{x}\right| > M$$

Invirtiendo la expresión queda:

$$|x| < \frac{1}{M}$$

O bien:

$$|x - 0| < \frac{1}{M} = \delta$$

Esto último demuestra la proposición inicial.

EJEMPLO 2

Discútase la continuidad de la función $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 2}{x^2 + 2x + 1}$ en $x = -1$.

SOLUCIÓN:

1. Si evaluamos $f(-1) = \dfrac{(-1)^2 - (-1) - 2}{(-1)^2 + 2(-1) + 1}$, nos queda una indeterminación de la forma $\dfrac{0}{0}$, fallando así la proposición [3-6-2] (obsérvese que $x = -1$ no pertenece al dominio de $f(x)$).
2. Factoricemos la función como $f(x) = \dfrac{(x+1)(x-2)}{(x+1)^2}$, de modo que la podemos reducir a $f(x) = \dfrac{(x-2)}{x+1}$. No obstante la reducción, la indeterminación persiste para $x = -1$, si hacemos $f(-1) = -\dfrac{3}{0}$, lo cual sigue indicando la falla en la proposición [3-6-2] y nos conduce a aceptar la existencia de una asíntota en $x = -1$.
3. La función toma un valor $M = 30.001$ para una tolerancia de $-0{,}0001$ y $x = -1{,}0001$, por la izquierda, lo mismo ocurre para $\delta = 0{,}0001$, en la que $M = -29.999$ para $x = -0{,}9999$ (Véase la Tabla 3.6 y la gráfica de la Figura 3.24).
4. Debido a que los valores de la función *crecen sin límite* cuando x tiende al valor de menos uno, las ramas de la gráfica se encierran en el tubo de base 2δ a partir de la cota $y > M$ para la rama positiva e $y > -M$ para la rama negativa (véase la gráfica de la Figura 3.22).
5. Escribiremos esto último como: $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = \infty$ y $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = -\infty$, de lo cual concluimos que $f(x)$ es discontinua al infinito en $x = -1$.

TABLA 3.6. Tabla de valores para $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 2}{x^2 + 2x + 1}$.

x	y
…	…
−1,1	31
−1,01	301
−1,001	3.001
−1,0001	30.001
−1	¿ ?
−0,9999	−29.999
−0,99	−299
−0,9	−29
…	…

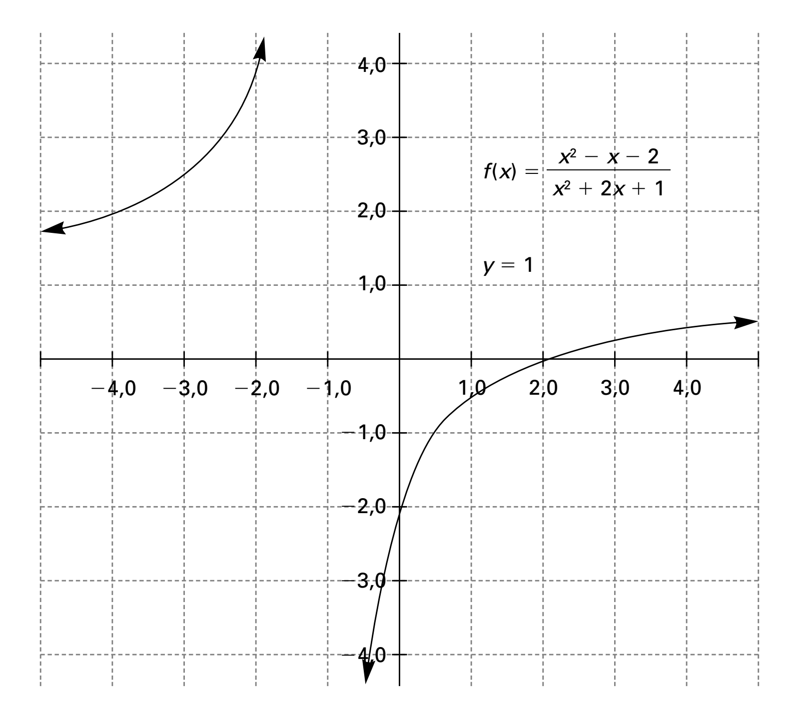


FIGURA 3.23. Gráfica de $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 2}{x^2 + 2x + 1}$.

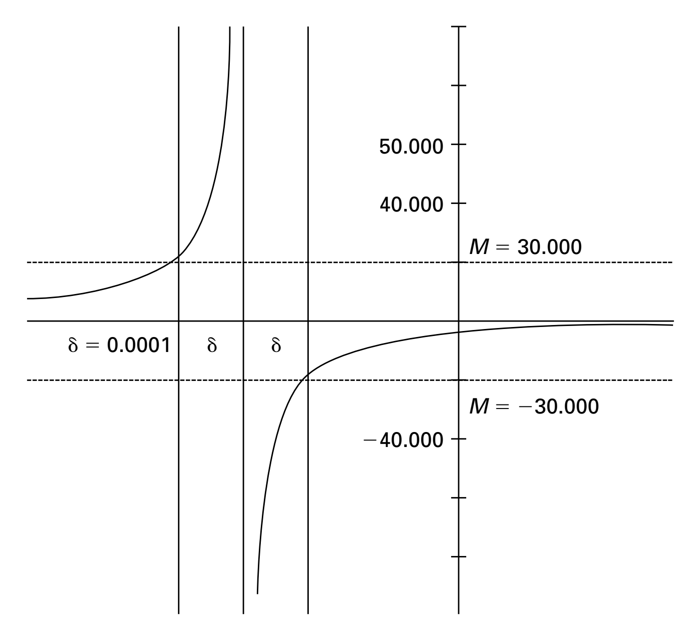


FIGURA 3.24. Gráfica de $f(x)$ cercana de las cotas $y = M = 30.000$ e $y = M = -30.000$

6. Podemos verificar la existencia de una asíntota horizontal, si hacemos $y = f(x)$ y escribimos la función a través de su inversa como $y = \frac{(x - 2)}{x + 1}$. Despejamos de esta última el valor de x, obtenemos por inversa: $x = \frac{-y - 2}{y - 1}$.

Expresión en la que y no puede tomar el valor de uno, o sea: $y \neq 1$, consecuentemente en $y = 1$ la gráfica de la función $y = f(x)$ tiene una asíntota horizontal. Véase la gráfica de la Figura 3.23.

EJEMPLO 3

Analice la continuidad de la función $f(x) = \frac{-5}{\left(x - \frac{1}{2}\right)^4}$ alrededor de $x = \frac{1}{2}$, tómese una tolerancia $\delta = 0{,}0001$.

SOLUCIÓN:

Para valores muy cercanos a $x = \frac{1}{2} = 0{,}5$, tanto por la izquierda y derecha, $f(x)$ toma valores muy grandes haciéndose además negativa; para la tolerancia $\delta = 0{,}0001$, con $|x - 0{,}5| < 0{,}0001$:

$$x = 0{,}4999 \quad f(0{,}4999) > M = -5000000000000000 \text{ y}$$
$$x = 0{,}5001 \quad f(0{,}5001) > M = -5000000000000000$$

Estos últimos valores son indicio que en $x = \frac{1}{2}$ la gráfica se va a menos infinito; la escribimos como:

$$\lim_{x \to \frac{1}{2}^-} \frac{-5}{\left(x - \frac{1}{2}\right)^4} = \lim_{x \to \frac{1}{2}^+} \frac{-5}{\left(x - \frac{1}{2}\right)^4} = -\infty$$

Así, dado que el límite para cuando la sucesión de valores de y se pierde al menos infinito, cuando la sucesión de valores de x se aproxima a $\frac{1}{2}$, podemos concluir que la función $f(x) = \frac{-5}{\left(x - \frac{1}{2}\right)^4}$, es discontinua al infinito, contando con una asíntota en $x = \frac{1}{2}$.

No obstante, si determinamos la inversa de la función, despejando el valor de x como $x = \sqrt[4]{-\frac{5}{y}} + \frac{1}{2}$, de donde $y \neq 0$, ello nos da para deducir la existencia de una asíntota horizontal en $y = 0$. Véase la gráfica en la Figura 3.25.

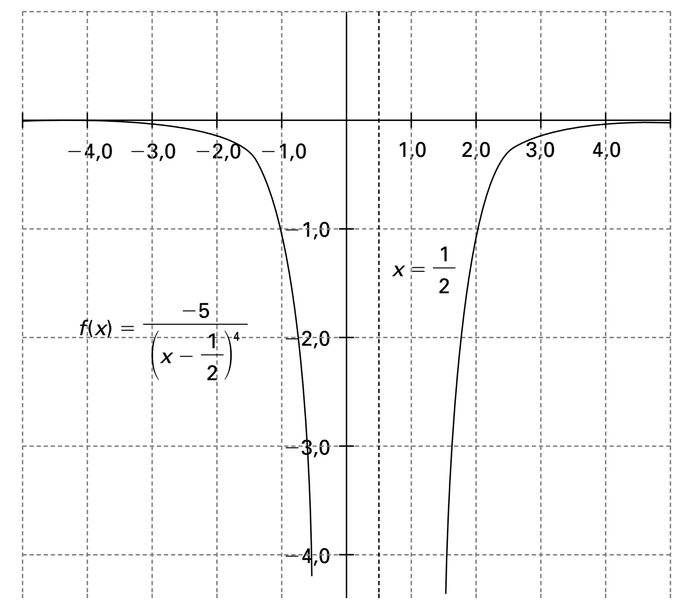


FIGURA 3.25. La función $f(x) = \dfrac{-5}{\left(x - \frac{1}{2}\right)^4}$ es discontinua a menor infinito para $x = 1/2$.

EJEMPLO 4

Analice la continuidad de la función $y = \dfrac{3}{5^{\frac{1}{x^2}} - 1}$ alrededor de $x = 0$, tome una tolerancia $\delta = 0{,}1$

SOLUCIÓN:

Un razonamiento por demás simple, más válido, es el siguiente: Si x toma un valor cercano a cero en la función $y = \dfrac{3}{5^{\frac{1}{x^2}} - 1}$, al elevarse al cuadrado el resultado es más pequeño, de modo que al hacer la división $\dfrac{1}{x^2}$ esta queda con un valor numérico M muy grande. Al realizar la operación 5^M nos arrojará un valor N todavía más grande que tiende al infinito. Estaríamos hablando de una operación semejante a $\dfrac{3}{N-1}$, o bien $\dfrac{3}{N}$, genéricamente se habla de expresiones de la forma $\dfrac{a}{\infty}$, cuyo resultado tiende a cero.

En este caso, resulta insignificante restar 1 a un valor lo suficientemente grande como N, en ese sentido $N - 1$ sigue siendo N.

Veamos esto último para $\delta = 0{,}1$ (para $\delta = -0{,}1$ resulta lo mismo puesto que el signo se pierde al elevar al cuadrado):

Para la tolerancia $\delta = 0{,}1$, $x = 0{,}1$, tenemos: $\dfrac{1}{(0{,}1)^2} = 100$, de aquí nos queda:

$$\frac{3}{5^{100} - 1} = \frac{3}{7{,}88 \times 10^{69} - 1} = \frac{3}{7{,}88 \times 10^{69}} = 3{,}80 \times 10^{-70}$$

Observa que la expresión $\dfrac{3}{7{,}88 \times 10^{69}}$ es de la forma $\dfrac{3}{N}$, o bien $\dfrac{3}{\infty}$, cuyo resultado es cero. Esto es cierto puesto que el número $3{,}80 \times 10^{-70}$ se encuentra exageradamente cercano a cero. Luego podemos decir que:

a) $f(0) = 0$, es decir la función está definida en $x = 0$.

b) $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{3}{5^{\frac{1}{x^2}} - 1} = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{3}{5^{\frac{1}{x^2}} - 1} = 0$

De aquí que se cumpla con las proposiciones de continuidad [3-6-2] y [3-6-3], y podamos afirmar que la función $y = \dfrac{3}{5^{\frac{1}{x^2}} - 1}$ es continua en $x = 0$. La gráfica de esta función se puede observar en la Figura 3.26.

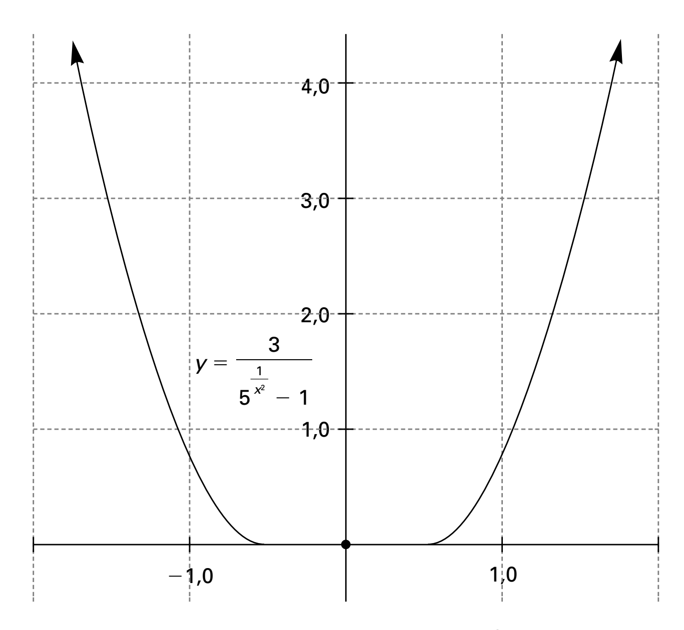


FIGURA 3.26. Gráfica de $y = \dfrac{3}{5^{\frac{1}{x^2}} - 1}$.

ACTIVIDADES Y EJERCICIOS DE LAS SECCIONES 3.6.1 A 3.6.3

1. 1) Para $f(x)$ y a, como se indica, encuentre o muestre que el límite no existe, 2) En cada caso aclare si la función $f(x)$ es continua en $x = a$ haciendo uso de las propiedades de continuidad en un punto [3-6-2], [3-6-3] y [3-6-4], 3) En los casos de los problemas donde la discontinuidad es removible, establezca la función continua correspondiente.

a) $f(x) = 3x^2 - 2x + 1, a = 3$

b) $g(x) = 6x^2 - x - 1, a = 1$

c) $h(x) = x^6 - x^4 + x + 1, a = 0$

d) $s(x) = 2(x - 1)^3 + 3(x - 1)^2 + 2(x - 1) - 5, a = 1$

e) $p(x) = 7 - (x + 2) + 2(x + 2)^2 - (x + 2)^5, a = -2$

f) $l(x) = \frac{1}{2}x^3 + \frac{5}{8}x^2 - \frac{3}{5}x + \frac{1}{100}, a = 0$

g) $r(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}, a = 0$

h) $m(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - 8}{x - 2} & \text{si } x \neq 2 \\ 2 & \text{si } x = 2 \end{cases}, a = 2$

i) $w(x) = \begin{cases} \frac{x}{|x|} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}, a = 0$

j) $t(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - x - 6}{x^2 + 3x + 2} & \text{si } x \neq -2 \\ 5 & \text{si } x = 2 \end{cases}, a = -2$

k) $q(x) = \begin{cases} 5x^2 - 3 & \text{si } x \leq 1 \\ 3x + 2 & \text{si } x > 1 \end{cases}, a = 1$

l) Encuentre los valores de a y b para que la siguiente función sea continua en $a = 1$:

$$o(x) = \begin{cases} \frac{5}{x - 1} & \text{si } x > 1 \\ ax + b & \text{si } x = 1 \\ x^3 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

2. En cada uno de los siguientes problemas, evalué el límite o bien muestre que este no existe.

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0}, f(x) = x^3 - 2x - 3$

b) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{g(x) - g(1)}{x - 1}, g(x) = 2x^2 + 3x - 7$

c) $\lim\limits_{t \to 3} \dfrac{f(t) - f(3)}{t - 3}$, si $f(t) = t^3 - 10$

d) $\lim\limits_{t \to -1} \dfrac{s(t) - s(-1)}{s + 1}, s(t) = 2t^4$

3.7.2. LÍMITES INFINITOS, FUNCIONES RACIONALES Y DISCONTINUIDAD

En la sección 3.6 vimos el caso en que para tolerancias δ lo suficientemente pequeñas, ocurren tolerancias M lo suficientemente grandes que nos facilitaron para aceptar las proposiciones:

[3-7-1] Si $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \infty$ y $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \infty$ diremos que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$. O bien el caso contrario: $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = -\infty$ y $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = -\infty$, es decir: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$.

[3-7-2] $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \infty$ y $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = -\infty$ o viceversa $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = -\infty$ y $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = +\infty$.

En este apartado asumiremos el caso contrario, en el cual la tolerancia en x sea lo suficientemente grande como M, de manera que la tolerancia ε en $f(x)$ sea lo suficientemente pequeña.

¿Cuáles son los problemas que $f(x)$ presenta cuando $x > M$, es decir, cuando x toma valores muy grandes?

Consideremos los siguientes casos viéndolos a través de ejemplos específicos en los que se *intuye* el valor del límite:

a) Si $f(x) = \dfrac{a}{x}$, para a número real cualesquiera, entonces $f(x)$ tiende a cero (Véase el parágrafo 2.3.4.10).

b) Si $f(x) = \dfrac{5x - 1}{x} = 5 - \dfrac{1}{x}$, entonces $f(x)$ tiende a $5 - 0 = 5$.

c) Si $f(x) = x^n$, para n número entero, par e impar, entonces $f(x)$ también crece o decrece sin límite, afirmándose que tiene por límite al infinito o al menos infinito.

Véase cada uno de estos casos en las gráficas de la Figura 3.27.

FIGURA 3.27. Gráficas de a) $f(x) = \frac{a}{x}$, b) $f(x) = \frac{5x - 1}{x}$, c) $f(x) = x^n$.

Límites de funciones racionales

$$\lim_{x \to \infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \begin{cases} \infty & n > m \\ \frac{a_n}{b_n} & n = m \\ 0 & n < m \end{cases}$$

Observe que los incisos a) y b) se muestran bajo funciones racionales de la forma $\frac{P(x)}{Q(x)}$, en la que el grado del polinomio P es menor que el grado del polinomio Q. En el caso del inciso b) el grado de ambos polinomios es igual. En el tercer caso, inciso c), la función propuesta tiene por límite inevitablemente al infinito, aun cuando, en otros casos, la función es racional del tipo en la que el grado del polinomio P es mayor que el grado del polinomio Q. Los tres casos son resumidos delante de este párrafo.

TABLA 3.7. Tabla de valores para $y = \frac{1}{x}$.

x	$y = \frac{1}{2}$
1	1
2	$\frac{1}{2}$
100	$\frac{1}{100}$
1.000	$\frac{1}{1.000}$
…	…
$N \to \infty$	0

El primer caso puede ser escrito como:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{a}{x} = 0$$

(Léase *el límite de la sucesión de valores de* $\frac{\text{a}}{\text{x}}$ *es cero, cuando* x *toma valores lo suficientemente grandes al infinito*): En la Tabla 3.4 se aprecia el caso particular de la función $y = \frac{1}{x}$; para valores de x lo suficientemente grandes, la sucesión de valores de y tienen por límite a cero.

En el segundo caso escribimos:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{5x - 1}{x} = \lim_{x \to \infty} \left(5 - \frac{1}{x}\right) = 5 - 0 = 5$$

En este tenemos una convención del tipo $\lim_{x \to \infty} f(x) = L$, la cual se interpreta diciendo *la sucesión de valores de* y *tiene por límite a* L (si este existe) *cuando la sucesión de valores de* x *crece sin límite*. Obsérvese que el caso del inciso a) es válido para esta expresión cuando $L = 0$.

El tercero se puede escribir como:

$$\lim_{x \to \infty} x^n = \pm\infty$$

Este último se debe leer como *el límite de la sucesión de valores de* y *es más menos infinito cuando* x *toma valores demasiado grandes*. No obstante, recuérdese que el símbolo ∞ es solamente una convención que no involucra al infinito como un número real, consecuentemente, la lectura toma más precisión de la siguiente manera: *la sucesión de valores de* y *crece sin límite cuando la sucesión de valores de* x*, también, crece sin límite*. Ambas formas de leer la proposición son importantes.

En los casos en que la función toma valores muy grandes y negativos, se acepta su escritura bajo la forma:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = -\infty$$

EJEMPLO 1

$$\lim_{x \to \infty} (5 - x^4) = -\infty$$

Otras combinaciones posibles se dan en los siguientes casos:

EJEMPLO 2

1. $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\frac{3}{4}x - 1\right) = -\infty$

2. $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{8x + 1}{2x} = 4$

3. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{100}{x^3 - 1} = 0$

El significado de cada una de esas expresiones debe ser lo suficientemente claro como para poder expresarse con palabras. Por ejemplo, en el primer caso decimos *la sucesión de valores que toma la función f(x)* $= \frac{3}{4}x - 1$ *crece sin límite tomando valores negativos, cuando la sucesión de valores de* x *crece sin límite tomando valores negativos.*

A partir de lo anterior podemos establecer la siguiente proposición:

La expresión:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L$$

es válida si se sujeta a las tolerancias:

$$x > M \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

[3-7-3]

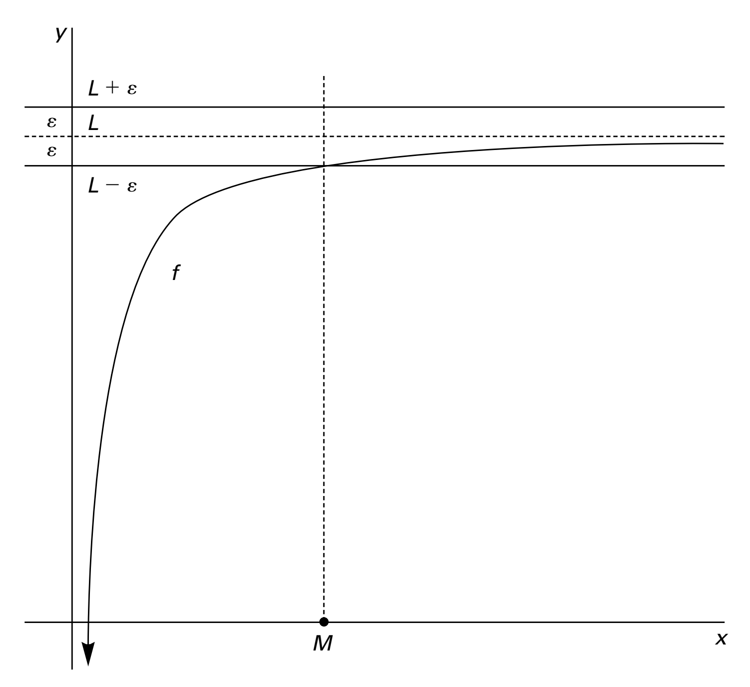


FIGURA 3.28. La gráfica de $f(x)$ toma valores muy próximos a L cuando $x > M$.

Geométricamente, la proposición (3-7-3) significa que si trazamos una recta vertical que pase por $(M, 0)$ para $M > 0$ lo suficientemente grande (Véase la gráfica de la Figura 3.28) entonces existe una tolerancia positiva ε, tal que, a excepción del punto (M, L), contiene la porción de la gráfica entre $L - \varepsilon$ y $L + \varepsilon$ que se encuentra a la derecha de la recta vertical. Esto último sugiere que la gráfica tiende a encerrarse dentro del *tubo* que determina la tolerancia ε cuya base es 2ε.

De igual forma, la gráfica de la función tiende a *acostarse* o replegase sobre la recta $y = L$, la cual les sirve de asíntota, a pesar de ser horizontal. Para valores de x mayores que M, la gráfica se pliega más rápidamente sobre la asíntota, haciéndose así la distancia entre ambas menor que ε. ¿Cuándo ambas, gráfica y asíntota, se juntarán o serán iguales?

Un caso particular al calcular el límite $\lim_{x \to \infty} f(x) = L$, es el resultado de la ecuación $y = L$ de la asíntota horizontal sobre la que se repliega la gráfica de $f(x)$.

EJEMPLO 3

Determine la asíntota horizontal sobre la que se repliega la gráfica de la función $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 2}{x^2 + 2x + 1}$, vista en el ejemplo 2 de la sección 3.7.

SOLUCIÓN:

Se pide determinar $y = \lim_{x \to \infty} \dfrac{x^2 - x - 2}{x^2 + 2x + 1}$.

En este caso NO se puede aplicar directamente la proposición [3-7-3] debido a que si lo hiciéramos tanto el numerador como el denominador se perderían al infinito, teniéndose una indeterminación de la forma $\dfrac{\infty}{\infty}$. No obstante, para evitar la indeterminación, funciona bien cambiar la función dividiendo numerador y denominador por el valor del mayor grado n del polinomio en la expresión, en este caso en x^2, puesto que $n = 2$. Veamos:

$$y = \lim_{x \to \infty} \frac{\dfrac{x^2}{x^2} - \dfrac{x}{x^2} - \dfrac{2}{x^2}}{\dfrac{x^2}{x^2} + \dfrac{2x}{x^2} + \dfrac{1}{x^2}} = \frac{\lim_{x \to \infty}\left(1 - \dfrac{1}{x} - 2\dfrac{1}{x^2}\right)}{\lim_{x \to \infty}\left(1 + 2\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2}\right)} =$$

$$y = \frac{1 - \lim_{x \to \infty} \dfrac{1}{x} - 2\lim_{x \to \infty} \dfrac{1}{x^2}}{1 + 2\lim_{x \to \infty} \dfrac{1}{x} + \lim_{x \to \infty} \dfrac{1}{x^2}} = \frac{1 - 0 - 0}{1 + 0 + 0} = 1$$

De aquí que la asíntota horizontal buscada se encuentra en $y = 1$.

Otra forma de ver el resultado de la proposición [3-7-3], es considerar la asíntota horizontal $y = L$ representa una cota superior o inferior de la gráfica de la función. Esto último puede escribirse en la siguiente proposición como:

Una función f *se dice acotada, cuando* x → ∞, *si existe una tolerancia* M > 0 *de manera que en todos los valores de* x *que satisfagan a* |x| > M. *Siendo la cota respectiva de la forma* y > L, y < L, y ≥ L *o* y ≤ L.

[3-7-4]

Demostración:
Para $\lim_{x \to \infty} f(x) = L$ se cumple que para las tolerancias $x > M$ y $|f(x) - L| < \varepsilon$:

$$-\varepsilon < f(x) - L < \varepsilon$$

Y puesto que L es un número real:

$$L - \varepsilon = \ < f(x) < L + \varepsilon$$

Esto último indica que $f(x)$ es acotada entre $L - \varepsilon$ y $L + \varepsilon$.
Para el caso del ejemplo 3 anterior, la función se encuentra acotada puesto que para $\varepsilon = 0{,}0001$, f se encuentra entre:

$$1 - 0{,}0001 < \frac{(x-2)}{x+1} < 1 + 0{,}0001$$

Es decir:

$$0{,}999 < \frac{(x-2)}{x+1} < 1{,}0001$$

De acuerdo a la gráfica de la Figura 3.21, diremos que f tiene una cota inferior, que debe escribirse como $y > 1$ en la parte del dominio $(-\infty, -2)$, y una cota superior $y < 1$, en la parte del dominio $(-2, \infty)$.

EJEMPLO 4

Determínense las asíntotas horizontales y verticales sobre las que se repliega la gráfica de la función $f(x) = \frac{3x+5}{x^2-1}$, así como las cotas respectivas.

SOLUCIÓN:

1. La función f no está definida para $x = 1$ y $x = -1$, de aquí que para estos valores la función cuenta con asíntotas verticales.
2. La gráfica de la función se presenta en la Figura 3.29.
3. Para determinar las asíntotas horizontales hagamos:

$$y = \lim_{x \to \infty} \frac{3x+5}{x^2-1} = \lim_{x \to \infty} \frac{3\frac{x}{x^2} + 5\frac{1}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} - \frac{1}{x^2}} =$$

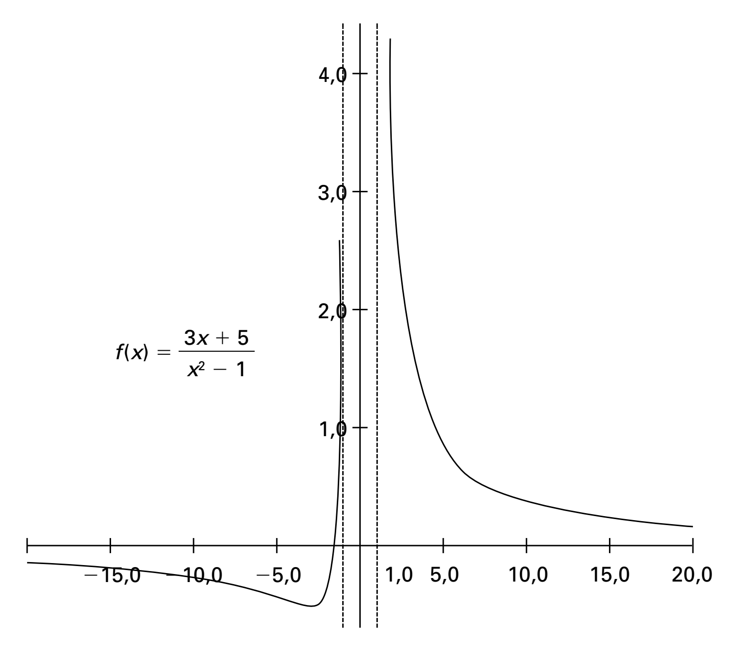


FIGURA 3.29. Gráfica de $f(x) = \dfrac{3x + 5}{x^2 - 1}$.

$$y = \frac{3 \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1}{x} + 5 \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1}{x^2}}{1 - \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1}{x^2}} = \frac{3(0) + 5(0)}{1 - 0} = \frac{0}{1} = 0$$

Luego, una asíntota horizontal se encuentra en $y = 0$. Este último valor es a su vez una cota superior, $y < 0$, para la parte del dominio de la función entre $(-\infty, -1)$ e inferior, $y > 0$, para la parte que se coloca entre $(1, \infty)$.

Si bien hasta ahora hemos determinado límites infinitos de funciones racionales con la finalidad de apoyarnos en estos para determinar su gráfica, se hace necesario sistematizar el proceso de graficación de este tipo de funciones. El siguiente ejemplo tiene por objeto señalar una serie de pasos que ayuden en la graficación de las funciones racionales a partir de los métodos y técnicas que hasta aquí hemos visto.

EJEMPLO 5

Determine la gráfica de la siguiente función racional $R(x) = \dfrac{x^2 + 2x - 8}{x^2 + x - 2}$.

SOLUCIÓN:

1. La función se puede factorizar como $R(x) = \dfrac{(x - 2)(x + 4)}{(x - 1)(x + 2)}$. Observe que $R(x)$ no está definida para $x = 1$ y $x = -2$, consecuentemente la gráfica de esta función tiene asíntotas verticales en ambos valores. Véase la Figura 3.30.

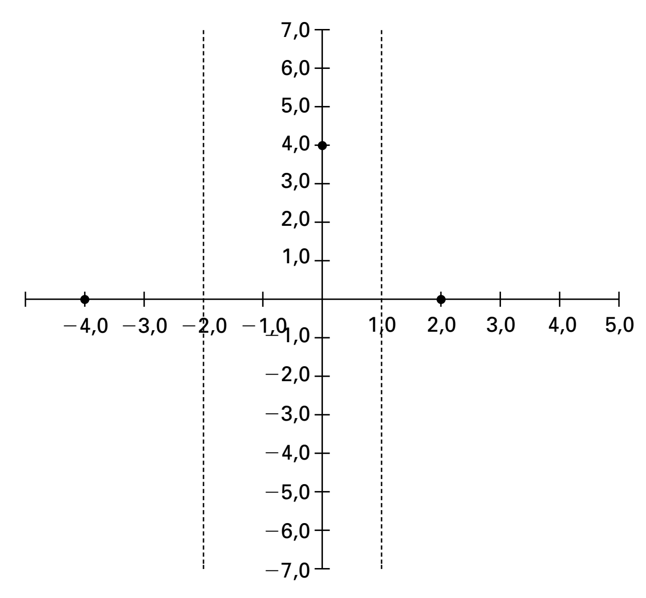


FIGURA 3.30. $f(x)$ cuenta con asíntotas verticales en $x = -2$ y $x = 1$.

2. Enseguida determinamos los valores de x para los cuales la gráfica de la función $R(x)$ corta al eje de las x, es decir, nos cuestionamos por:

$$R(x) = \frac{(x-2)(x+4)}{(x-1)(x+2)} = 0$$

O bien:

$$\frac{(x-2)(x+4)}{(x-1)(x+2)} = 0$$

Luego:

$$(x-2)(x+4) = 0$$

Siendo los valores buscados:

$$x = 2 \text{ y } x = -4$$

Un valor peculiar es el de $x = 0$ e $y = 4$.
Señalamos estos tres puntos en la gráfica, como se aprecia en la Figura 3.29.

3. Enseguida se examina la naturaleza variacional de la gráfica cercana a los valores $x = 1$ y $x = -2$, donde no es definida. Esto se logra evaluando los siguientes cuatro límites:

a) $\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{(x-2)(x+4)}{(x-1)(x+2)} = ?$ c) $\lim\limits_{x \to -2^-} \dfrac{(x-2)(x+4)}{(x-1)(x+2)} = ?$

b) $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{(x-2)(x+4)}{(x-1)(x+2)} = ?$ d) $\lim\limits_{x \to -2^+} \dfrac{(x-2)(x+4)}{(x-1)(x+2)} = ?$

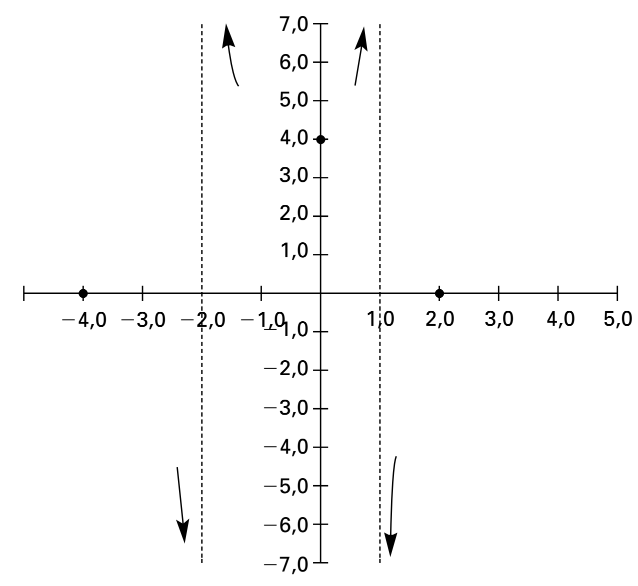


FIGURA 3.31. Segmentos de gráfica de $f(x)$ cercanos a las asíntotas verticales.

(Recuerda que $x \to 1^-$ significa que x está cercano a -1 por la izquierda. De modo que la evaluación de estos límites resulta al probar con valores muy próximos a este, por ejemplo $-1{,}1$ por la izquierda de -1). Los resultados son los siguientes:

a) $\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{(x-2)(x+4)}{(x-1)(x+2)} = \infty$

b) $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{(x-2)(x+4)}{(x-1)(x+2)} = -\infty$

c) $\lim\limits_{x \to -2^-} \dfrac{(x-2)(x+4)}{(x-1)(x+2)} = -\infty$

d) $\lim\limits_{x \to -2^+} \dfrac{(x-2)(x+4)}{(x-1)(x+2)} = \infty$

Luego colocamos en el bosquejo los segmentos de gráfica que corresponden a los valores de los límites determinados anteriormente. Tal como se aprecia en la gráfica de la Figura 3.32.

4. El paso final consiste en determinar, si las hubiera, las asíntotas horizontales, de la función $R(x)$. Esto se logra determinando los siguientes límites:

a) $y = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{(x-2)(x+4)}{(x-1)(x+2)}$ b) $y = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{(x-2)(x+4)}{(x-1)(x+2)}$

El proceso, como hemos visto, es sencillo y consiste en dividir ambos polinomios por la x de mayor grado. Veamos:

a) $y = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{(x-2)(x+4)}{(x-1)(x+2)}$

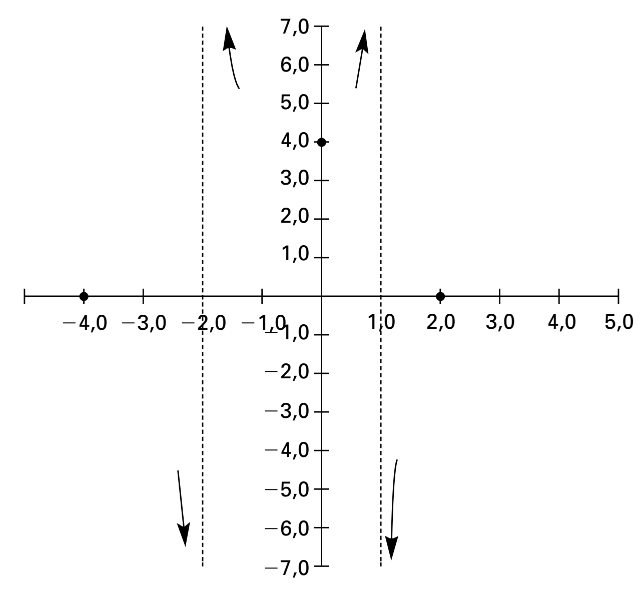


FIGURA 3.32. Comportamiento de $f(x)$.

$$y = \lim_{x \to -\infty} \frac{\left(1 - \dfrac{2}{-x}\right)\left(1 + \dfrac{4}{-x}\right)}{\left(1 - \dfrac{1}{-x}\right)\left(1 + \dfrac{2}{-x}\right)}$$

$$y = \lim_{x \to -\infty} \frac{\left(1 + \dfrac{2}{x}\right)\left(1 - \dfrac{4}{x}\right)}{\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)\left(1 - \dfrac{2}{x}\right)} = \frac{(1)(1)}{(1)(1)} = 1$$

b) $y = \lim_{x \to \infty} \dfrac{(x - 2)(x + 4)}{(x - 1)(x + 2)}$

$$y = \lim_{x \to -\infty} \frac{\left(1 - \dfrac{2}{x}\right)\left(1 + \dfrac{4}{x}\right)}{\left(1 - \dfrac{1}{x}\right)\left(1 + \dfrac{2}{x}\right)} = \frac{(1)(1)}{(1)(1)} = 1$$

Para cuando $x \to -\infty$ $R(x)$ cuenta con una asíntota horizontal en $y = 1$. En ambos casos, cuando $x \to \pm\infty$ $R(x)$ cuenta con una asíntota horizontal en $y = 1$.
Utilizamos esta información colocando segmentos de la gráfica de $R(x)$ para valores muy grandes de x, tal como se ve en la gráfica de la Figura 3.33.
El último paso consiste en unir los segmentos de gráfica haciéndola pasar por los valores donde $R(x) = 0$, así como por el punto $x = 0$ e $y = 4$. Recuerda respetar la curvatura de la curva. La gráfica final se encuentra en la Figura 3.34.

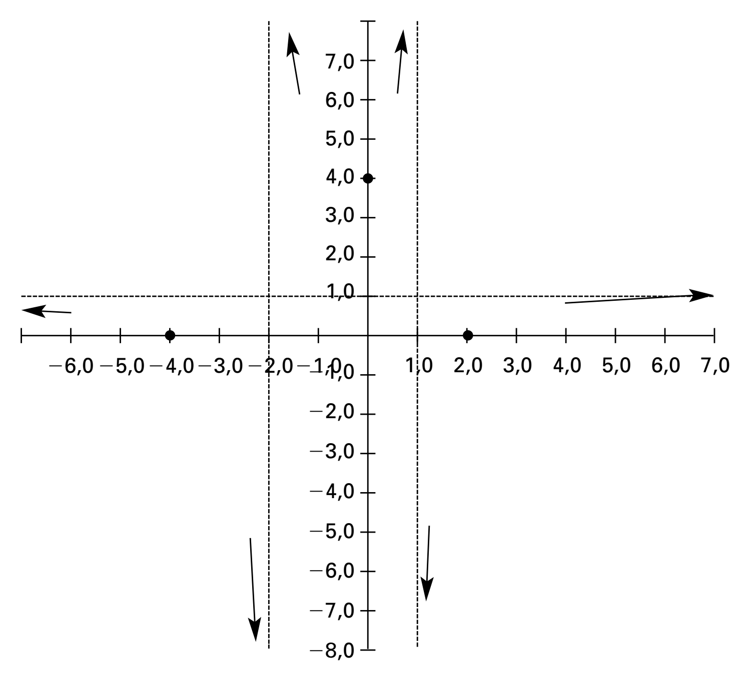


FIGURA 3.33. Comportamiento global de $f(x)$ cercano a las asintotas verticales y horizontal.

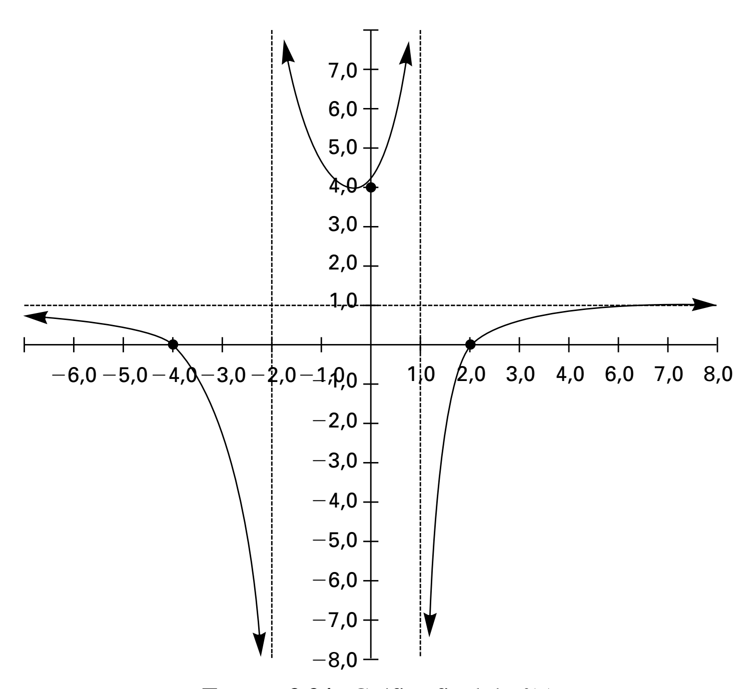


FIGURA 3.34. Gráfica final de $f(x)$.

EJEMPLO 6

Dada la siguiente función $f(x) = \dfrac{x+1}{x}$:

a) Determine $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x+1}{x}$.

b) Pruebe que $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x+1}{x} = 1$, para un $\varepsilon = 0{,}01$.

c) Demuestre que $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x+1}{x} = 1$, para $x > M \Rightarrow |f(x) - \varepsilon| < 0$.

d) Diseñe la gráfica de f.

SOLUCIÓN:

a) Reescribamos la función como:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right) = 1 + \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}\right) = 1 + 0 = 1$$

Esto significa que la función f cuenta con una asíntota horizontal en $y = 1$. No obstante f no está definida para $x = 0$, de aquí que tenga una asíntota vertical sobre esa recta.

b) Para $L = 1$ con $\varepsilon = 0{,}01$, se pide probar $x > M$:

$$|f(x) - L| < \varepsilon$$

Es decir:

$$\left|\frac{x+1}{x} - 1\right| < 0{,}01$$

O bien:

$$\left|\frac{1}{x} + 1 - 1\right| < 0{,}01$$

$$\left|\frac{1}{x}\right| < 0{,}01$$

Que podemos escribir como:

$$-0{,}01 < \frac{1}{x} < 0{,}01$$

Es decir:

$$-\frac{1}{0{,}01} > x > \frac{1}{0{,}01}$$

Luego:

$$|x| > 100 = M$$

Esto último prueba que para $L = 1$ con $\varepsilon = 0{,}01$, $x > 100$, en tanto es cierto que $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x+1}{x} = 1$.

c) Para la demostración seguiremos los pasos de la prueba anterior. Se pide demostrar que para $L = 1$ con $|f(x) - L| < \varepsilon$ existe x, tal que $x > M$:
Siendo:

$$|f(x) - L| < \varepsilon$$

Es decir:

$$\left|\frac{x+1}{x} - 1\right| < \varepsilon$$

O bien:

$$\left|\frac{1}{x} + 1 - 1\right| < \varepsilon$$

$$\left|\frac{1}{x}\right| < \varepsilon$$

Que podemos escribir como:

$$-\varepsilon < \frac{1}{x} < \varepsilon$$

Es decir:

$$-\frac{1}{\varepsilon} > x > \frac{1}{\varepsilon}$$

Luego:

$$|x| > \frac{1}{\varepsilon} = M$$

Esto último prueba que para $L = 1$ con $|f(x) - L| < \varepsilon$, existe x tal que $x > M$, en tanto es cierto que $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x+1}{x} = 1$.

d) La gráfica la podemos diseñar a partir del procedimiento visto en el ejemplo 5 anterior, o bien haciendo uso de la suma de las ordenadas de las funciones $f(x) = 1 + \frac{1}{x}$, con $f_1 = 1$ y $f_2 = \frac{1}{x}$. No obstante, podemos combinar ambos métodos para lograr una mejor aproximación.

La parte interesante de la gráfica se coloca en que tanto $f_1 = 1$ como $f_2 = \frac{1}{x}$, son asíntotas de la propia función $f(x) = x + \frac{1}{x}$; la primera es una asíntota horizontal, mientras que la segunda se puede llamar *asíntota curva*. No obstante, esta última sirve de *guía* a la gráfica de $f(x)$ teniendo ambas, a su vez, por asíntota vertical la recta $x = 0$. Véase la gráfica de la Figura 3.35.

Este último resultado nos ofrece argumentos para analizar con más detalle la variación de las funciones. En la siguiente sección veremos dos tópicos que sobresalen del ejemplo 6; por un lado, curvas que sirven de asíntotas a las propias funciones

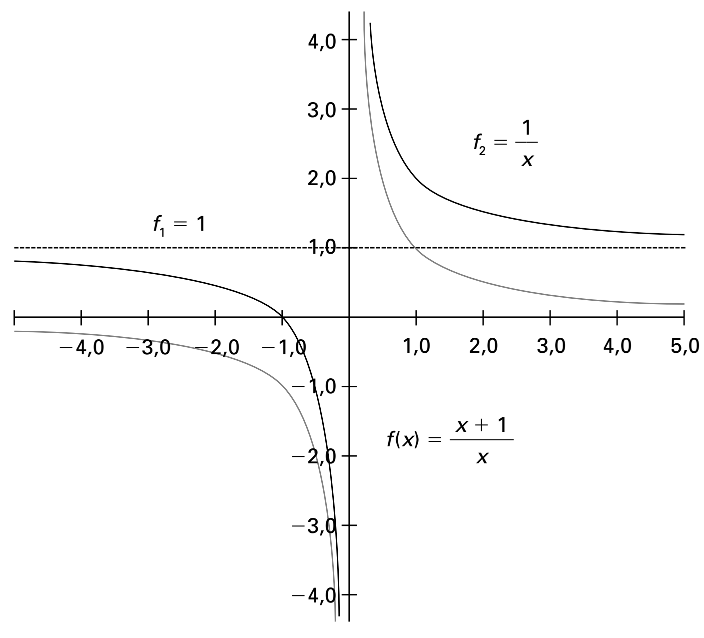


FIGURA 3.35. $f(x)$ cuenta con una asíntota curva, esta es $f_2 = \frac{1}{x}$.

y, por otro, asíntotas oblicuas, es decir, rectas de la forma $y = mx + b$, sobre las que se pliegan las gráficas de las funciones que hasta ahora hemos analizado.

3.7.3. ASÍNTOTAS OBLICUAS Y CURVAS

Siendo $\lim_{x \to \infty} f(x) = L$, vimos que la línea recta $y = L$ es una asíntota horizontal de la gráfica de $f(x)$, toda vez que cota superior o inferior.

> *En general, si suponemos funciones* f(x) *y* g(x) *definidas para valores de* x *lo suficientemente grandes* x > M, *de modo que ocurra:*
>
> $$\lim_{x \to \infty} (f(x) - g(x)) = 0$$
>
> *Entonces las gráficas de* f *y* g *se aproximan una a la otra asintóticamente cuando* x > M (véase la gráfica de la Figura 3.36).

[3-7-5]

La proposición [3-7-5] adopta tres casos particulares:

1. La asíntota $g(x)$ es una recta horizontal $y = L$.
2. La asíntota $g(x)$ es una recta oblicua de la forma $y = mx + b$.
3. La asíntota $g(x)$ sea una curva común.

Los tres casos se presentan en funciones racionales $\frac{P(x)}{Q(x)}$, en las que el grado del polinomio P es mayor o igual que el grado del polinomio Q. Ante ello es conveniente hacer la división $Q\overline{)P}$, en la que resultan las funciones f y g, es decir: $Q\overline{)P} = f(x) + g(x)$. En cualquier caso f puede ser de la forma $y = L$, $y = mx + b$, o bien una función polinomial como $y = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0$, sumada a un residuo $g(x) = \frac{R(x)}{Q(x)}$.

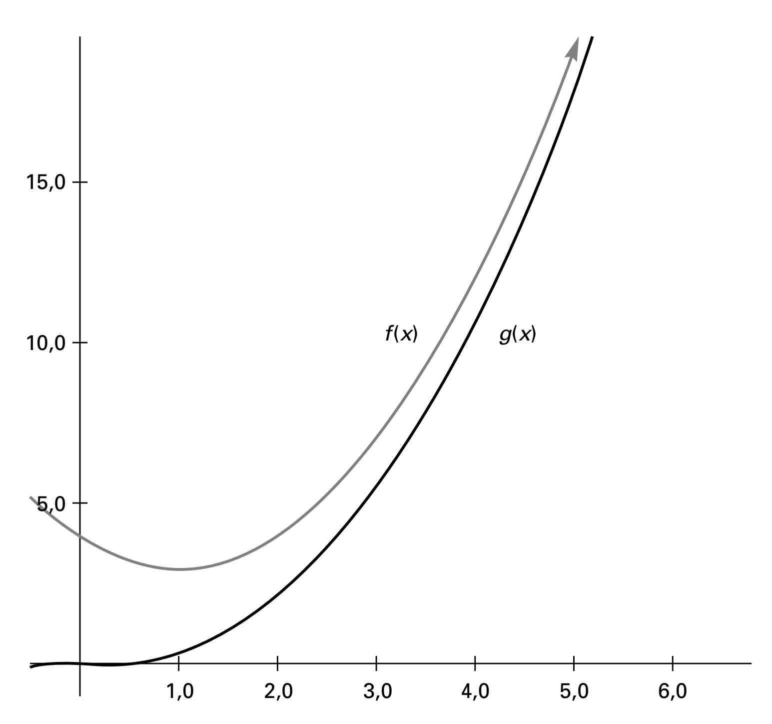


FIGURA 3.36. La curva $g(x)$ sirve de asíntota a la gráfica de $f(x)$.

En el caso del ejemplo 6 de la sección 3.7.2, la división $x\overline{)x + 1} = 1 + \frac{1}{x}$, deja ver como $y = 1$, resulta ser la asíntota horizontal de la función $f(x) = \frac{x+1}{x}$. Si aplicamos la proposición [3-7-5] a f e y, tendremos:

$$\lim_{x \to \infty} (f - y)$$

O bien:

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{x+1}{x} - 1 \right) = \lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x} - 1 \right) = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{1}{x} \right) = 0$$

Resultado que muestra la certeza de la existencia de la asíntota horizontal $y = 1$.

EJEMPLO 1

Determine las asíntotas: verticales, horizontales, oblicuas o curvas, si las hay, de la función $s(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x}$, así como su gráfica.

SOLUCIÓN:

1. Puesto que $s(x)$ no puede tomar el valor de $x = 0$, en éste la gráfica de la función cuenta con una asíntota vertical.
2. Hagamos $s(x) = x + \dfrac{1}{x}$, con $f = x$ y $g = \dfrac{1}{x}$. En este caso $f = x$ es candidato a ser asíntota oblicua, puesto que es de la forma $y = mx + b$.
3. Verifiquemos esto último aplicando la proposición [3-7-5]. En este caso nos cuestionamos por:

$$\lim_{x \to \infty} (s(x) - f), \text{ es decir:}$$

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{x^2 - 1}{x} - x \right)$$

Que lo reescribimos como:

$$\lim_{x \to \infty} \left(x - \frac{1}{x} - x \right)$$

O sea:

$$\lim_{x \to \infty} \left(-\frac{1}{x} \right) = 0$$

Lo cual indica que, efectivamente, la recta a 45° $f = x$, es asíntota oblicua de la función $s(x)$, véase la gráfica de la Figura 3.37.

4. Obsérvese en la gráfica de la figura anterior, como la función $g = \dfrac{1}{x}$, sirve de *guía* a la gráfica de la función $s(x)$ para ir replegándose sobre la asíntota vertical.

Para el diseño de la gráfica de $s(x)$, es conveniente dibujar previamente las gráficas de f y g.

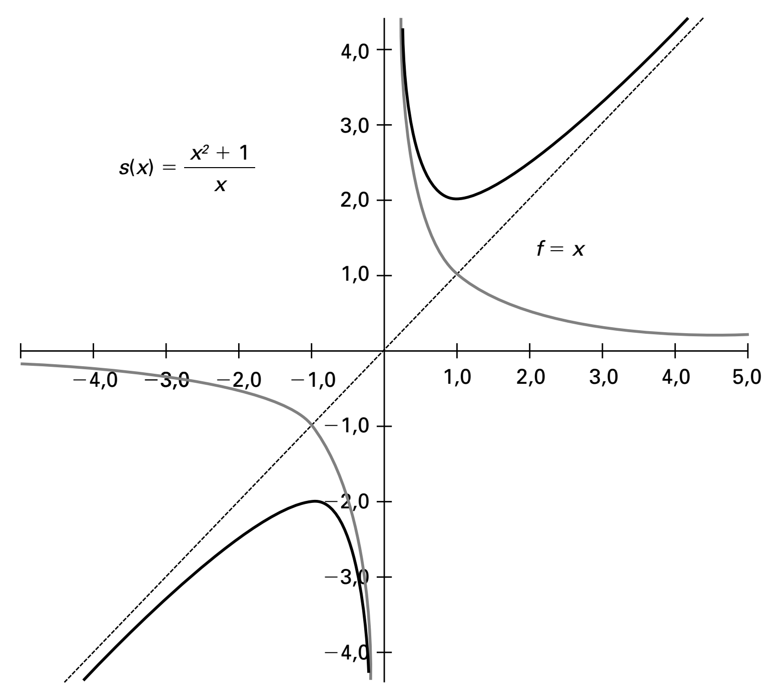


FIGURA 3.37. $g(x) = \dfrac{1}{x}$ es asíntota curva para $s(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x}$.

EJEMPLO 2

Determine las asíntotas verticales, oblicuas, curvas y horizontales, si las hubiera, de la función $p(x) = \dfrac{x^3}{x + 2}$.

SOLUCIÓN:

1. La función $p(x)$ cuenta con una asíntota vertical en $x = -2$.
2. Hagamos la división:

$$\frac{x^3}{x + 2} = x^2 - 2x + 4 - \frac{8}{x + 2}$$

   La función $p(x)$ se puede dividir en $f = x^2 - 2x + 4$ y $g = \dfrac{-8}{x + 2}$, en la cual f es candidato a ser asíntota curva de la función $p(x)$.
3. Verifiquemos esto último haciendo uso de la proposición [3-7-5]:
   Nos cuestionamos por el límite:

$$\lim_{x \to \infty} (s(x) - f)$$

   O sea:

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{x^3}{x + 2} - (x^2 - 2x + 4) \right)$$

Hagamos:

$$\lim_{x \to \infty} \left(x^2 - 2x + 4 - \frac{8}{x + 2} - x^2 + 2x - 4 \right)$$

Quedando:

$$\lim_{x \to \infty} \left(-\frac{8}{x + 2} \right) = -8 \lim_{x \to \infty} \left(\frac{1}{x + 2} \right) = 0$$

Esto último indica que la función $f = x^2 - 2x + 4$ es una asíntota curva de la gráfica de $p(x)$.

4. La Figura 3.38 muestra, con línea más obscura, la gráfica de $p(x)$ y más tenue las gráficas de f y g. Se aprecia cómo $p(x)$ toma por asíntota la cuadrática f y por asíntota vertical la recta $x = -2$, sirviéndole de guía, en este caso, la gráfica de la función g.

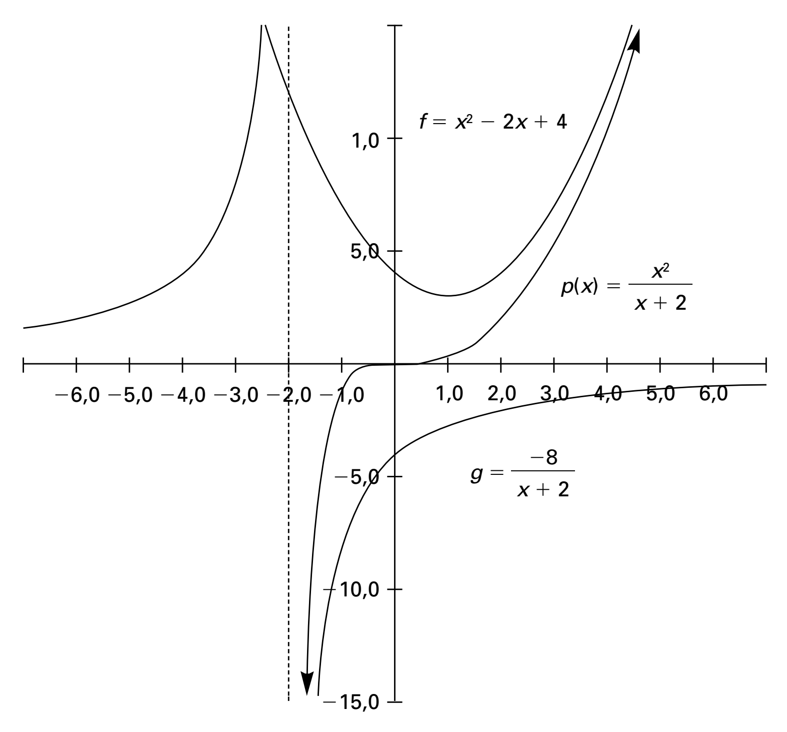


FIGURA 3.38. $f(x)$ es asíntota curva para la gráfica de $p(x)$.

EJEMPLO 3

Determine los valores de m y b en el siguiente límite

$$\lim_{x \to \infty} \left[\frac{x^3 + 1}{x^2 + 1} - (mx + b) \right] = 0$$

SOLUCIÓN:

La pregunta tiene que ver con la proposición [3-7-5], es decir, $\lim\limits_{x \to \infty} (f(x) - g(x)) = 0$. En esencia, se centra en la cuestión de si la función $f(x) = \dfrac{x^3 + 1}{x^2 + 1}$ tiene una asíntota oblicua de la forma $y = mx + b$. Sería infructuoso determinar los valores de m y b intentando resolver el límite que se presenta. No obstante, resulta más sencillo hacer la división $x^2 + 1\overline{)x^3 + 1}$, y verificar el tipo de asíntota que de ello resulta.

En este caso:

$$\begin{array}{r} x \\ x^2 + 1\overline{)x^3 + 1} \\ -x^3 - x + 1 \end{array}$$

Quedándonos la expresión final como:

$$\frac{x^3 + 1}{x^2 + 1} = x - \frac{x - 1}{x^2 + 1}$$

De este último resultado podemos concluir que la función $f(x)$ tiene una asíntota oblicua de la forma $y = x$, en la que $m = 1$ y $b = 0$.

3.7.4. LÍMITES ESPECIALES

$$\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

Donde n es un número natural y $e = 2{,}71828\ldots$

[3-7-6]

Prueba:

La Tabla 3-5 muestra la variación de la función $f(x) = \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x$ cuando x crece sin límite, es decir para cuando $x \to \infty$.

Al tomar valores de x por ejemplo de 1.000.000, la función se aproxima a 2,718280469, en tanto que para 10.000.000, la función toma el valor de 2,718281693…

La diferencia entre ambos valores en la función es poco significativa, del orden de 0,000001223. Para el valor de 100.000.000 la función toma el valor de 2,718281815…, con una diferencia respecto a la anterior del orden de 0,000000121.

Estos resultados muestran que para valores muy grandes de x, como los que tomamos, los valores que asume la función se van *frenando* acercándose a

TABLA 3.8. Tabla de valores para $f(x) = \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x$.

x	$f(x)$
1	2
2	2,25
3	2,3704
…	…
10	2,59982
100	2,70481
10.000	2,71815
1.000.000	2,71828
10.000.000	2,718281
…	…

un límite parecido cada vez más a los valores de la función, los cuales a su vez forman la siguiente sucesión:

$$2{,}718280469,\ 2{,}718281693,\ 2{,}718281815\ldots$$

Admitamos, sin demostrarlo, que el último término de esta sucesión, es decir, su límite, existe al crecer indefinidamente. Este límite se designa con la letra e, cuyas cifras decimales se pueden exhibir así:

$$e = 2{,}718281827\ldots$$

De manera que la sucesión anterior se puede reescribir como:

$$2{,}718280469,\ 2{,}718281693,\ 2{,}718281815,\ \ldots,\ e$$

Y la expresión de inicio como:

$$\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

O bien $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \dfrac{k}{x}\right)^x = e^k$, para k número real.

EJEMPLO 1

Calcular $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \dfrac{2^x}{x}\right)$.

SOLUCIÓN:

Por la proposición [3-7-6] $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \dfrac{2^x}{x}\right) = e^2$.

EJEMPLO 2

Calcular $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{x}{x+1}\right)^x$.

SOLUCIÓN:

Dividiendo la expresión por x, queda:

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{\frac{x}{x}}{\frac{x}{x} + \frac{1}{x}}\right)^x = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{1}{1 + \frac{1}{x}}\right)^x = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x}$$

Luego:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x} = \frac{1}{e} = e^{-1}$$

EJEMPLO 3

Calcular el límite $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{x - 1}{x + 3} \right)^{x+2}$.

SOLUCIÓN:

Hagamos:

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{x - 1}{x + 3} \right)^{x+2} = \lim_{x \to \infty} \frac{(x - 1)^{x+2}}{(x + 3)^{x+2}} = \lim_{x \to \infty} \frac{(x - 1)^x (x - 1)^2}{(x + 3)^x (x + 3)^2}$$

O bien:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\left(1 + \frac{-1}{x}\right)^x}{\left(1 + \frac{3}{x}\right)^x} \cdot \lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + 6x + 9} = \lim_{x \to \infty} \frac{\left(1 + \frac{-1}{x}\right)^x}{\left(1 + \frac{3}{x}\right)^x} \cdot \lim_{x \to \infty} \frac{1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{6}{x} + \frac{9}{x^2}}$$

Quedando:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\left(1 + \frac{-1}{x}\right)^x}{\left(1 + \frac{3}{x}\right)^x} \cdot \frac{1 - \lim\limits_{x \to \infty} \frac{2}{x} + \lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x^2}}{1 + \lim\limits_{x \to \infty} \frac{6}{x} + \lim\limits_{x \to \infty} \frac{9}{x^2}}$$

De aquí que:

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{x - 1}{x + 3} \right)^{x+2} = \frac{e^{-1}}{e^3} \cdot \frac{1}{1} = e^{-1} \cdot e^{-3} = e^{-4} = \frac{1}{e^4}$$

Consideremos las siguientes proposiciones:

La gráfica de una función g(x) *es mayor o igual que otra gráfica* f(x)*, lo cual se escribe como* g(x) ≥ f(x)*, si está por encima de ella o por debajo, teniendo un punto en común.*

[3-7-7]

Así como:

Si entre los valores del dominio de dos funciones f(x) *y* g(x)*, que tienden al mismo límite cuando* x → a *(o cuando* x → ∞*), se cumple la desigualdad* g(x) ≥ f(x)*, también se cumplirá que* $\lim\limits_{x \to a} g(x) \geq \lim\limits_{x \to a} f(x)$.

[3-7-8]

Demostración de la proposición [3-7-7]:
Puesto que $g(x) \geq f(x)$, entonces:

$$g(x) - f(x) \geq 0$$

De ello se desprende que:

$$\lim_{x \to a} (g(x) - f(x)) \geq 0$$

Es decir:

$$\lim_{x \to a} g(x) \geq \lim_{x \to a} f(x)$$

Lo cual se deseaba demostrar.

Veamos algunos límites de funciones trigonométricas elementales que se pueden determinar con esa propiedad.

EJEMPLO 1

Demostrar que $\lim_{x \to 0} \operatorname{sen} x = 0$.

SOLUCIÓN:

El ejemplo pareciera por demás simple, y quizá fuera suficiente con hacer $\lim_{x \to 0} \operatorname{sen} x = \operatorname{sen}(0) = 0$. No obstante, abordemos el problema a partir de la gráfica de la Figura 3.39.

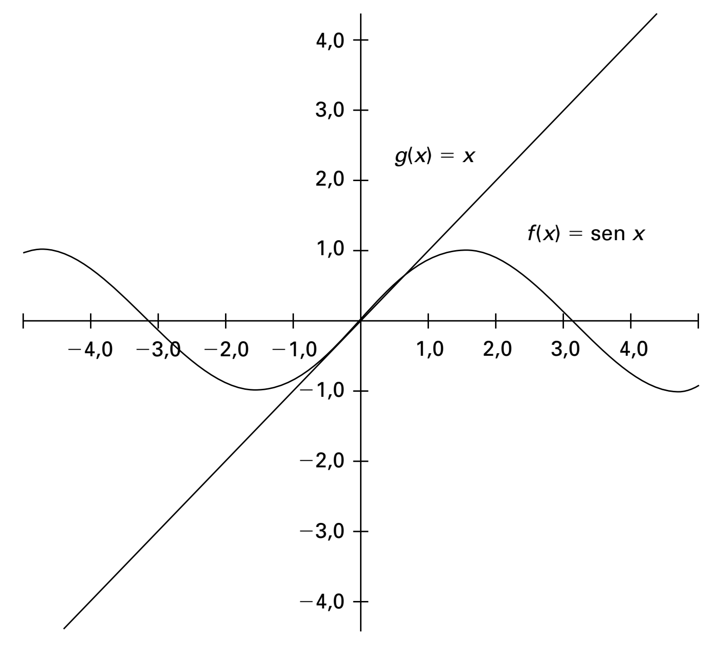


FIGURA 3.39. La gráfica muestra que $x \geq \operatorname{sen} x$.

La Figura 3.39 muestra la desigualdad entre las funciones $g(x) = x$ y $f(x) = \text{sen } x$, como:

$$x \geq \text{sen } x$$

En la que la igualdad se verifica para $x = 0$. Incluso $|x| \geq |\text{sen } x|$.

La propiedad [3-7-8] garantiza que:

$$\lim_{x \to 0} x \geq \lim_{x \to 0} (\text{sen } x)$$

Es decir:

$$0 \geq \lim_{x \to 0} (\text{sen } x)$$

En consecuencia:

$$\lim_{x \to 0} (\text{sen } x) = 0$$

Lo cual se deseaba demostrar.

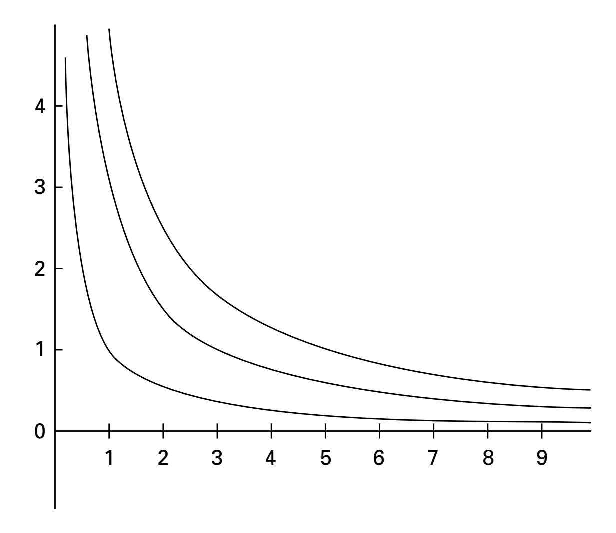


FIGURA 3.40. Funciones que tienden a un mismo límite cuando $x \to \infty$.

EJEMPLO 2

Con la misma idea, demostrar que $\lim_{x \to 0} \cos x = 1$.

SOLUCIÓN:

La gráfica de la Figura 3.41, muestra la desigualdad de las funciones $g(x) = x^2 + 1$ y $f(x) = \cos x$. Donde:

$$x^2 + 1 \geq \cos x$$

Ambas funciones coinciden en $x = 1$.

Por la propiedad [3-7-6], hagamos:

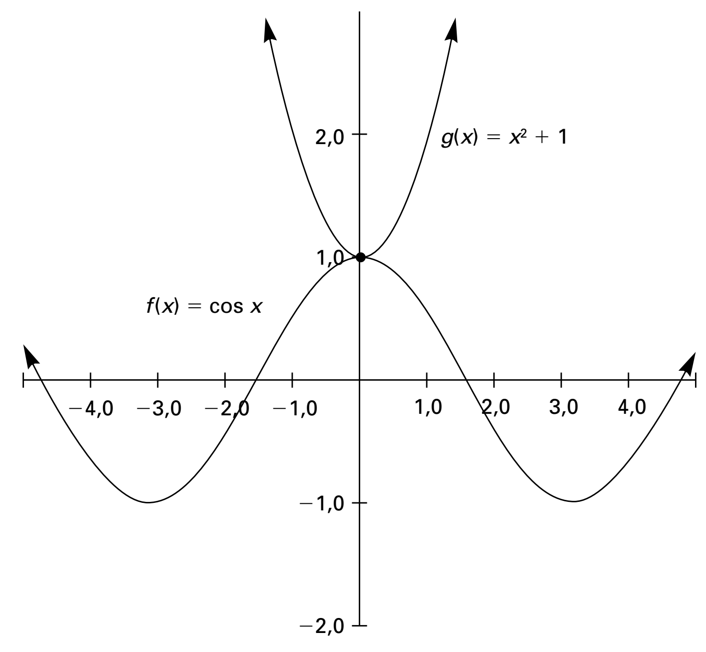


FIGURA 3.41. $x^2 + 1 \geq \cos x$.

$$\lim_{x \to 0} (x^2 + 1) \geq \lim_{x \to 0} (\cos x)$$

Es decir:

$$\lim_{x \to 0} (x^2 + 1) = \left(\lim_{x \to 0} x^2 + \lim_{x \to 0} 1\right) = (0 + 1) \geq \lim_{x \to 0} (\cos x)$$

O bien:

$$\lim_{x \to 0} \cos x = 1$$

Lo cual se deseaba demostrar.

3.7.4.1. Proposición 3-7-9 del *sandwich*

La siguiente proposición es consecuencia de la proposición [3-7-8].

Consideremos f(x), g(x) *y* h(x) *funciones en* x *de manera que obedezcan la desigualdad:*

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x)$$

Y en las cuales f(x) *y* g(x) *tiendan a un mismo límite* L *cuando* x → a *(o bien cuando* x → ∞*).* (Véanse las Figuras 3.41 y 3.42). *Entonces podemos afirmar que la función* g(x) *también tiende al límite* L *cuando* x → a *(o bien cuando* x → ∞*).*

[3-7-9]

Demostración:
De la desigualdad inferimos:

$$f - L < g - L < h - L$$

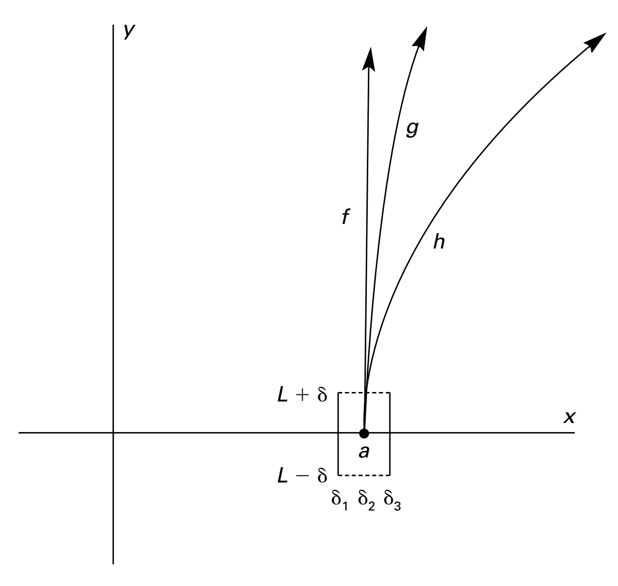


FIGURA 3.42. Las funciones *f*, *g* y *h* tienen por límite común a *L* para $x = a$.

Tenemos además que:

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} h(x) = L$$

De esto último resulta cierto que para tolerancias $\varepsilon > 0$ y $\delta_1 > 0$:

$$|f - L| > \varepsilon$$

Así como para $\varepsilon > 0$ y $\delta_2 > 0$:

$$|h - L| > \varepsilon$$

De aquí se cumple que:

$$-\varepsilon < f - L < \varepsilon \text{ y } -\varepsilon < h - L < \varepsilon$$

Por lo tanto también se cumple que para un δ_3 entre $\delta_1 < \delta_3 < \delta_2$:

$$-\varepsilon < |g - L| < \varepsilon$$

Es decir es cierta la proposición [3-7-9]:

$$\lim_{x \to a} g(x) = L$$

3.7.4.2. Determinación del límite $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\text{sen } x}{x}$

Consideremos la siguiente proposición:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen } x}{x} = 1$$

[3-7-10]

Demostración:

Es claro que si se hace una evaluación directa del valor al que tiende x tendríamos una indeterminación de la forma:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen } x}{x} = \frac{\text{sen } (0)}{0} = \frac{0}{0}$$

No obstante, en la gráfica de la Figura 3.43 hemos colocado las funciones $f(x) = \text{tg } x$, $g(x) = x$ y $h(x) = \text{sen } x$. En esta, $f(x) = \text{tg } x$ está por encima de $g(x) = x$ y, a su vez, esta última por encima de $h(x) = \text{sen } x$, ello ocurre en el primero y segundo cuadrantes. En los cuadrantes tercero y cuarto sucede lo mismo, $f(x)$ es mayor que $g(x)$, así como esta última lo es de $h(x)$, cumpliéndose la desigualdad:

$$|\text{tg } x| \geq |x| \geq \text{sen } x$$

De manera que lo que ocurra a la parte positiva de las funciones involucradas, será igual para la parte negativa.

Hagamos:

$$\text{tg } x \geq x \geq \text{sen } x$$

Y puesto que $\text{tg } x = \dfrac{\text{sen } x}{\cos x}$:

$$\frac{\text{sen } x}{\cos x} \geq x \geq \text{sen } x$$

Dividiendo esta última por sen x.

$$\frac{\dfrac{\text{sen } x}{\cos x} \geq x \geq \text{sen } x}{\text{sen } x}$$

Queda:

$$\frac{\dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}}{\dfrac{\operatorname{sen} x}{1}} \geq \frac{x}{\operatorname{sen} x} \geq \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x}$$

$$\frac{\dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}}{\dfrac{\operatorname{sen} x}{1}} = \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x \cdot \cos x}$$

O bien:

$$\frac{1}{\cos x} \geq \frac{x}{\operatorname{sen} x} \geq 1$$

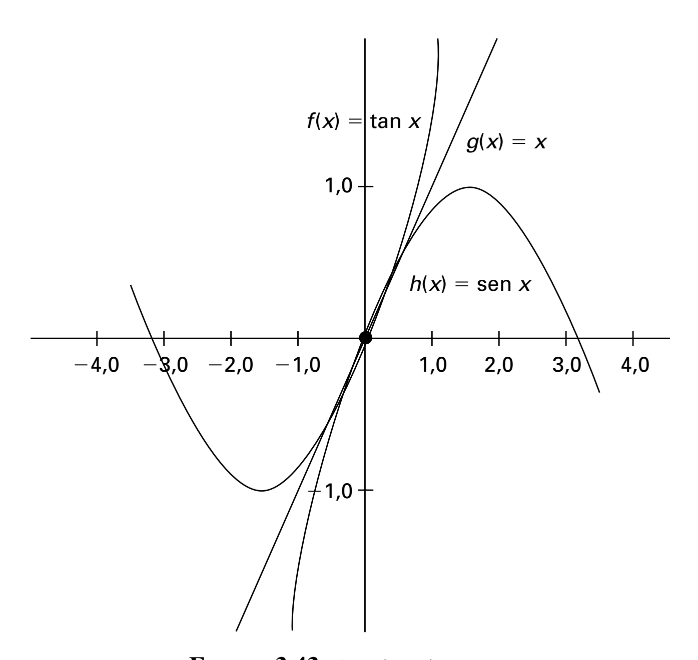


FIGURA 3.43. tg $x \geq x \geq$ sen x.

Si invertimos esta última expresión se invertirán además los símbolos de desigualdad, quedando:

$$\cos x \leq \frac{\operatorname{sen} x}{x} \leq 1$$

Aplicando $\lim\limits_{x \to 0}$ a toda la desigualdad, tenemos:

$$\lim_{x \to 0} \left(\cos x \leq \frac{\operatorname{sen} x}{x} \leq 1 \right) =$$

$$\lim_{x \to 0} (\cos x) \leq \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \leq \lim_{x \to 0} (1)$$

Puesto que anteriormente demostramos que $\lim_{x \to 0} \cos x = 1$ (véase ejemplo 2 del parágrafo anterior), y $\lim_{x \to 0} (1) = 1$. Nos queda:

$$1 \leq \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \leq 1$$

De modo que, por la proposición [3-7-9]:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$$

Lo cual se deseaba demostrar.

EJEMPLO 1

Determinar los límites a) $\lim_{x \to 3} \frac{\operatorname{sen} x}{x}$ y b) $\lim_{x \to \infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x}$.

SOLUCIÓN:

En ambos casos el cálculo es inmediato, basta con evaluar directamente el valor del límite en las expresiones dadas, puesto que al hacerlo no se incurre en indeterminación alguna, solamente habrá que cuidar el valor del infinito considerando este último como un valor extremadamente grande M. Así:

$$\text{a) } \lim_{x \to 3} \frac{\operatorname{sen}(3)}{(3)} = \frac{0{,}411}{3} = 0{,}047 \qquad \text{b) } \lim_{x \to \infty} \frac{\operatorname{sen} M}{M} = \frac{\pm 1}{M} = 0$$

EJEMPLO 2

Determinar el valor del límite $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} 5x}{x}$.

SOLUCIÓN:

El límite tiene la forma de la proposición [3-7-9], falta solamente *completarle*, haciendo:

$$\frac{5}{5} \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} 5x}{x} = 5 \cdot \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} 5x}{5x} = 5 \cdot 1 = 5$$

EJEMPLO 3

Determinar el límite $\lim_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 5x}{\operatorname{sen} x}$.

SOLUCIÓN:

Dividamos el numerador y denominador de la expresión por x, como:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\dfrac{\operatorname{sen} 5x}{x}}{\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}}$$

Ahora completemos el denominador, haciendo:

$$5 \cdot \lim_{x \to 0} \frac{\dfrac{\operatorname{sen} 5x}{5x}}{\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}}$$

De aquí que:

$$5 \cdot \lim_{x \to 0} \frac{\dfrac{\operatorname{sen} 5x}{5x}}{\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}} = 5 \cdot \frac{1}{1} = 5$$

3.7.4.3. Determinación del límite $\lim_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x}{x}$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$$

[3-7-11]

Demostración:
Hagamos uso de la desigualdad inicial del límite anterior, es decir:

$$\operatorname{tg} x \geq x \geq \operatorname{sen} x$$

Dividamos toda la desigualdad por tg x:

$$\frac{\operatorname{tg} x \geq x \geq \operatorname{sen} x}{\operatorname{tg} x}$$

Quedando:

$$1 \geq \frac{x}{\operatorname{tg} x} \geq \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{tg} x}$$

Invirtiendo la desigualdad:

$$1 \leq \frac{\operatorname{tg} x}{x} \leq \frac{1}{\cos x}$$

Aplicando $\lim\limits_{x \to 0}$:

$$\lim_{x \to 0} \left(1 \leq \frac{\operatorname{tg} x}{x} \leq \frac{1}{\cos x} \right)$$

Queda:

$$\lim_{x \to 0} (1) \leq \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} \leq \frac{1}{\lim\limits_{x \to 0} \cos x}$$

Luego:

$$1 \leq \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} \leq \frac{1}{1}$$

De aquí que, por la proposición [3-7-8]:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$$

Lo cual se deseaba demostrar.

3.7.4.4. Determinación del límite $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0$$

[3-7-12]

Demostración:

En la expresión: $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x}$, multipliquemos por el conjugado del numerador, haciendo:

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x} \cdot \frac{1 + \cos x}{1 + \cos x}$$

Quedando:

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x(1 + \cos x)}$$

Y puesto que $\operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x$:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x(1 + \cos x)}$$

De modo que:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \cdot \frac{\operatorname{sen} x}{1 + \cos x}$$

O bien:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \cdot \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{1 + \cos x}$$

Es decir:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \cdot \frac{\lim_{x \to 0} \operatorname{sen} x}{1 + \lim_{x \to 0} \cos x}$$

Quedando:

$$(1) \cdot \frac{0}{1 + 1} = (1) \cdot (0) = 0$$

Lo cual se deseaba demostrar.

ACTIVIDADES Y EJERCICIOS DE LAS SECCIONES 3.7 A 3.7.7

1. En los ejercicios a)-d) evalué la función racional en el valor numérico que se da.

a) $f(x) = \dfrac{x^3 - 2x + 1}{x^2 + 1}$ en $x = 1$ b) $g(x) = \dfrac{-2x^2 + 5x - 3}{x - 1}$ en $x = -3$

c) $h(x) = \dfrac{4}{x^4 + 2x^2 - 1}$ en $x = -2$ d) $m(x) = \dfrac{(x + 1)(x + 2)}{(-x + 1)(x - 3)}$ en $x = \dfrac{1}{3}$

2. En los ejercicios a)-j) determine el (o los) valores numéricos reales, en los cuales las funciones dadas no están definidas.

a) $r(x) = \dfrac{-x}{x^2 - 2x - 3}$ b) $p(x) = \dfrac{3}{x^2 - 3x + 5}$

c) $n(x) = \dfrac{x^2 - 5x + 3}{x^2}$ d) $q(x) = \dfrac{(x+3)(x+4)(x+5)}{(x-3)(x-4)(x-5)}$

e) $g(x) = \dfrac{1 - x^2}{(x-1)(x^2 + x + 4)}$ f) $i(x) = \dfrac{x + 4}{x^2 + 4}$

g) $j(x) = \dfrac{x^2 + 4}{x + 4}$ h) $k(x) = \dfrac{1}{x^6 + 1}$

i) $l(x) = \dfrac{x^3(x+2)}{x^3(x+2)}$ j) $m(x) = \dfrac{x^2 + 5x - 24}{x^2 - 5x - 24}$

3. En los ejercicios a)-l) encuentre los límites que se piden. Cuando el límite indicado no exista, encuentre los límites laterales. Use la notación $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = +\infty$ o $(-\infty)$ y $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = +\infty$ o $(-\infty)$.

a) $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{(5x - x^2)}{5 - x}$ b) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2 + 4x + 1}{x^2 - x - 3}$

c) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 - 9}{x^2 - 2x - 3}$ d) $\lim\limits_{x \to -5} \dfrac{x}{x + 5}$

e) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 - 6x + 9}{x - 3}$ f) $\lim\limits_{x \to 8} \dfrac{x - 8}{x^2 - 3x - 40}$

g) $\lim\limits_{x \to -5} \dfrac{x}{x^2 + 25}$ h) $\lim\limits_{x \to \frac{1}{5}} \dfrac{5x - 1}{(5x - 1)(25x^2 - 10x + 1)}$

i) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 4}{x^2 - 4}$ j) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{10}{x^3 - 2x^2}$

k) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{10}{x^3 - 2x^2}$ l) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{10}{x^3 - 2x^2}$

4. En los ejercicios a)-d) encuentre las asíntotas horizontales, haciendo uso de los límites: $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$ y $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

a) $f(x) = \dfrac{5x - 1}{x}$ b) $g(x) = \dfrac{2x - 3}{x^2 - 9}$

c) $s(x) = \dfrac{8x^2 - 2x + 1}{x^2 - 5x + 2}$ d) $p(x) = \dfrac{6x^2 - 3}{4x^2 + 5x + 1}$

e) Encuentre las asíntotas verticales y oblicuas de los ejercicios a)-d).

f) Encuentre las asíntotas horizontales de los ejercicios a)-d) haciendo la división: $Q(x)\overline{)P(x)}$.

5. Para los ejercicios a)-k) se da la función $f(x) = \dfrac{x-3}{x(x-1)(x-2)}$.

a) ¿Qué tipo de discontinuidad tiene $f(x)$ en $x = 0$, $x = 1$ y $x = 2$.

b) ¿Tiene $f(x)$ asíntotas verticales? ¿Cuáles son estas? Encuentre los siguientes límites.

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

d) $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$

e) $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$

f) $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$

g) $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$

h) $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x)$

i) $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$

j) $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$

k) Grafique $f(x)$.

6. Para cada una de las funciones racionales que se dan enseguida identifique: a) Los valores de x donde las gráficas cruzan el eje correspondiente. b) Los valores de x donde la función no este definida, es decir, los «huecos». c) Asíntotas verticales. d) Asíntotas horizontales. e) Algunos puntos más que configuren la gráfica. Dibujar la gráfica.

a) $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$

b) $g(x) = \dfrac{3}{x+2}$

c) $s(x) = \dfrac{-3}{x-1}$

d) $h(x) = \dfrac{4}{2x-3}$

e) $i(x) = \dfrac{3x}{x-4}$

f) $j(x) = \dfrac{-3x}{2-x}$

g) $k(x) = \dfrac{3x-1}{x+2}$

h) $l(x) = \dfrac{2x-1}{5x+2}$

i) $m(x) = \dfrac{-10x}{x^2-x+2}$

j) $n(x) = \dfrac{\frac{1}{2}x}{(x-1)(2x+3)}$

k) $p(x) = \dfrac{(2x-3)}{(2x-3)(2x+3)}$

l) $q(x) = \dfrac{(2x-3)}{(2x+3)(2x-1)}$

m) $r(x) = \dfrac{x(x-2)}{(x+1)(5x-3)}$

n) $t(x) = \dfrac{x}{x^2+4}$

ñ) $u(x) = \dfrac{x^2-x-6}{x^2+x-6}$

o) $v(x) = \dfrac{x(x+3)(x-4)}{(x-1)(x-2)(x-3)}$

p) $w(x) = \dfrac{x}{x^2+5x+1}$

q) $y(x) = \dfrac{-2x(1-x)}{x^2-4}$

r) Grafique $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$ y $g(x) = \dfrac{x+3}{(x-2)(x+3)}$

s) ¿En qué difieren las gráficas de $f(x)$ y $g(x)$ en el ejercicio r?

7. Dibuje las gráficas de cada una de las siguientes funciones racionales.

a) $f(x) = \dfrac{x^3(x-4)}{x^2(x-4)}$

b) $t(x) = \dfrac{x^2(x-4)}{x(x-4)^2}$

c) $m(x) = \dfrac{(x-2)(x+1)}{x(x^2-4)}$

d) $p(x) = \dfrac{x(x-5)}{(x-5)^2}$

e) En el ejercicio d la gráfica de $p(x) = \dfrac{x(x-5)}{(x-5)^2}$, no tiene ningún hueco a pesar que se hace necesario eliminar un binomio en el numerador, lo mismo ocurre en los problemas a, b, c. De una explicación de esto último.

f) Dadas las siguientes funciones:

$$1)\ f_1 = \frac{x}{x+1},\quad 2)\ f_2 = \frac{x^2}{x+1}\ \text{ y }\ 3)\ f_3 = \frac{x^3}{x+1}$$

Realice en cada caso la división $Q\overline{)P} = g + h$, para encontrar las asíntotas horizontal, oblicua y curva, según ocurra. Determine además las asíntotas verticales correspondientes, y construya la gráfica de cada función f_1, f_2 y f_3, a través de sumar o restar las ordenadas de las gráficas de g y f. Si lo considera necesario calcule algunos límites.

8. Calcule los siguientes límites.

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\text{sen } 2x}{x}$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\text{sen } \pi x}{\text{sen } 2\pi x}$

c) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{1}{x^2}\right)^{\frac{2x}{x+1}}$

d) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(x \text{ sen } \dfrac{\pi}{x}\right)$

e) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{\text{sen } 2x}{x}\right)^{x+1}$

f) $\lim\limits_{x \to 1} \left(\dfrac{x-1}{x^2-1}\right)^{x+1}$

g) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \dfrac{\frac{1}{2}}{x}\right)^{x}$

h) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{x-2}{x+3}\right)^{x+2}$

Parte II

Derivadas, aplicaciones de la derivada, series y sucesiones

Derivación

4


CURSO

DE ANALISIS

ARTURO A. LAMADRID

MEXICO

1912

«214. Consideremos la expresión:

$$y = F(x)$$

Si damos a x un incremento Δx, resultara por definición otro para la variable ligada, y designándolo por Δy, se tiene:

$$y + \Delta y = F(x + \Delta x)$$

Restando de la función dada de la incrementada para obtener el incremento de la función, resulta:

$$\Delta y = F(x + \Delta x) - F(x)$$

Dividiendo enseguida por Δx para obtener la relación de los incrementos, queda:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x}$$

Tomando límites en el supuesto de que Δx decrezca indefinidamente, obtenemos

$$\text{lím}\,\frac{\Delta y}{\Delta x} = \text{lím}\,\frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x}$$

Pero la relación

$$\frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x}$$

Tiende siempre a un límite determinado que Lagrange llama la derivada de la función, y que representa con el símbolo $F'(x)$, por consiguiente se tiene:

$$\text{lím}\,\frac{\Delta y}{\Delta x} = F'(x)\text{»}$$

Arturo A. Lamadrid, fue profesor de matemáticas en la Escuela Nacional de Agricultura y la Escuela Nacional Preparatoria, el texto de *Análisis*, cuya portada aparece a la izquierda, fue escrito por él en 1912.

4.1. DEFINICIÓN DE DERIVADA

4.1.1. DESARROLLOS BINOMIALES

La derivada de una función tiene relación con los desarrollos en serie. Una herramienta que permite desarrollar funciones como las vistas en los capítulos anteriores, es el teorema del binomio de Newton. En pocas líneas, esta herramienta se presenta generalmente a partir de la siguiente regla:

$$(a + b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)a^{n-2}b^2}{2!} + \frac{n(n-1)(n-2)a^{n-3}b^3}{3!} + \ldots$$

[4-1]

Por la recursividad de los términos el binomio es fácil de memorizar, de suerte que pueda ser usado con seguridad. En esta regla se conviene que n sea un número real: entero, fracción, etc., incluso negativo. Para los desarrollos de funciones generalmente a hace las veces de la variable x, en tanto b se supone un incremento dado a la misma, es decir $x + \Delta x$.

El incremento Δx se deduce de la condición de continuidad [3-6-4] vista en el capítulo anterior, es decir: $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$. En esta proposición la diferencia $x - a$ expresa el incremento de la variable Δx en el punto a, así: $\Delta x = x - a$. Siendo $\lim_{x \to a} (x - a) = \Delta x = 0$. Además, la diferencia $f(x) - f(a)$ expresa al incremento Δy de la función, condicionado al incremento de la variable en $x = a$, o sea $\Delta y = f(x) - f(a)$. De modo que ello se puede representar como: $\lim_{\Delta x \to 0} (f(x) - f(a)) = \Delta y = 0$. Más adelante veremos estos resultados con más detalle.

La regla [4-1] ofrece dos posibilidades para los desarrollos de funciones; en un primer caso se pueden determinar desarrollos con términos finitos a partir de considerar n como un entero positivo, en otro, el número de términos crece sin límite para valores de n en forma de fracción, positiva o negativa, o bien para valores enteros negativos. Veamos algunos desarrollos.

En el sentido en que la usamos, la palabra *expansión* es sinónimo de *desarrollo*.

Determinemos las *expansiones* que corresponden a las funciones a) $f(x) = x^2$, b) $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$ y c) $f(x) = x^{-1}$, incrementando la variable x como $x + \Delta x$. Se puede apreciar que estos ejemplos involucran los casos más representativos de los exponentes al utilizar el teorema del binomio:

a) Siendo: $f(x) = x^2$, incrementada queda: $f(x + \Delta x) = (x + \Delta x)^2$, resultando el desarrollo en expansión finita, como:

$$f(x + \Delta x) = (x + \Delta x)^2 = x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2$$

b) La función $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$ resulta incrementada como: $f(x + \Delta x) = (x + \Delta x)^{\frac{1}{2}}$, de manera que su expansión infinita se consigna así:

$$f(x+\Delta x) = (x+\Delta x)^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{1}{2}\right)x^{\frac{1}{2}-1}\Delta x + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}-1\right)x^{\frac{1}{2}-2}(\Delta x)^2}{2!} + \ldots$$

O bien, reduciendo las operaciones:

$$f(x+\Delta x) = (x+\Delta x)^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\Delta x - \frac{1}{8}x^{\frac{-3}{2}}(\Delta x)^2 + \ldots$$

c) $f(x) = x^{-1}$, incrementada queda: $f(x+\Delta x) = (x+\Delta x)^{-1}$, cuyo desarrollo es:

$$f(x+\Delta x) = (x+\Delta x)^{-1} = x^{-1} + (-1)x^{-1-1}\Delta x + \frac{(-1)(-2)x^{-1-2}(\Delta x)^2}{2!} + \ldots$$

O sea:

$$f(x+\Delta x) = (x+\Delta x)^{-1} = x^{-1} - x^{-2}\Delta x + x^{-3}(\Delta x)^2 + \ldots$$

Veamos enseguida el desarrollo de una función que contenga más términos, como por ejemplo $f(x) = 5x^2 + 2x - 1$.
Incrementando la función en $x + \Delta x$ nos queda:

$$f(x+\Delta x) = 5(x+\Delta x)^2 + 2(x+\Delta x) - 1$$

Desarrollando los binomios involucrados:

$$f(x+\Delta x) = 5(x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2) + 2(x+\Delta x) - 1$$

O bien:

$$f(x+\Delta x) = 5x^2 + 10x\Delta x + 5(\Delta x^2) + 2x + 2\Delta x - 1$$

Lo que sigue es ordenar los términos que resultaron de la siguiente manera: primero aquellos que no tienen asociado incremento alguno; después los que tienen asociado incremento de grado uno, luego los que contienen incremento de grado dos, tres, etc., o sea:

$$f(x+\Delta x) = (5x^2 + 2x - 1) + (10x + 2)\Delta x + 5(\Delta x^2)$$

Como ya lo habrás notado, cada uno de los cuatro desarrollos anteriores contiene una particularidad: en cada caso la función $f(x)$ encabeza el desarrollo respectivo. Si elegimos el primero de ellos, inciso a), pudiéramos reescribir la expresión $f(x+\Delta x) = x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2$, como:

a) $f(x+\Delta x) = f(x) + 2x\Delta x + (\Delta x)^2$

De igual forma para los anteriores:

b) $f(x+\Delta x) = f(x) + \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\Delta x - \frac{1}{8}x^{\frac{-3}{2}}(\Delta x)^2 + \ldots$

c) $f(x + \Delta x) = f(x) - x^{-2}\Delta x + x^{-3}(\Delta x)^2 + \ldots$
d) $f(x + \Delta x) = f(x) + (10x + 2)\Delta x + 5(\Delta x^2)$

Estos ejemplos nos dan la pauta para retomar algunos conceptos que se definieron de manera preliminar en el Capítulo 2, como fueron aquellos de variable, variación y variabilidad. Si elegimos de nuevo el primer ejemplo, diremos que estos conceptos aparecen como:

Variable: x
Variación: $x + \Delta x$
Variabilidad: $f(x + \Delta x) = f(x) + 2x\Delta x + (\Delta x)^2$

En tanto que los términos que integran la variabilidad de cada desarrollo son llamados *variaciones*, para el primer ejemplo se tienen:

Variaciones: $2x\Delta x + (\Delta x)^2$

En este sentido las variaciones tienen asociado al incremento en diferentes grados. Si nos seguimos guiando con el ejemplo, la primera de ellas es $2x\Delta x$, en tanto que la última es $(\Delta x)^2$. No obstante, y debido a que desconocemos quiénes son, llamaremos primera variación a aquella acompañada por el incremento de primer orden, en este caso $2x\Delta x$.

4.1.2. ECUACIÓN DE VARIACIONES

Como vimos, los desarrollos anteriores obedecen a las regularidades que les otorga el teorema del binomio, el cual hemos combinado con las funciones incrementadas en la forma $f(x + \Delta x)$. Esta idea permite llevar más allá la definición del teorema del binomio para generalizar los desarrollos en serie a través de la siguiente proposición:

$$f(x + \Delta x) = f(x) + A\Delta x + B(\Delta x)^2 + C(\Delta x)^3 + \ldots$$

[4-2]

Por su naturaleza, llamaremos a la regla [4-2] *Ecuación de variaciones*. En ella, los coeficientes A, B, C, etc., representan funciones en x. Además, dependiendo de la función desarrollada, la ecuación de variaciones puede ser finita o infinita, en cantidad de términos.

Entonces, el desarrollo de cada una de las funciones anteriores es en sí misma la ecuación de variaciones de la función a que corresponde. Para el ejemplo del inciso a) los coeficientes respectivos vienen a ser: $A = 2x\Delta x$ y $B = (\Delta x)^2$. En el caso del inciso b) cuyo desarrollo es infinito, se tienen:

$$A = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\Delta x,\ B = -\frac{1}{8}x^{\frac{-3}{2}}(\Delta x)^2,\ \text{etc.}$$

4.1.3. ESTUDIO DE LA PRIMERA VARIACIÓN. DERIVACIÓN POR INCREMENTOS

A partir de lo anterior, diremos que el estudio de las variaciones del desarrollo de toda función es la parte medular del cálculo diferencial. Ese estudio, al menos en este libro, será visto en dos partes: 1) en el análisis de la *primera* de las variaciones de cada desarrollo para las funciones vistas en los capítulos anteriores y sus significados asociados, estudio que trataremos en este y el siguiente capítulo; y 2) examinando el resto de las variaciones, en el sexto capítulo, en el cual la ecuación [4-2] y los desarrollos de funciones en serie serán el eje central del mismo.

Del ejemplo anterior visto en el inciso a):

$$f(x + \Delta x) = f(x) + 2x\Delta x + (\Delta x)^2$$

Hagamos la diferencia:

$$f(x + \Delta x) - f(x) = 2x\Delta x + (\Delta x)^2$$

En el siguiente paso dividamos ambos miembros por Δx, es decir:

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x}$$

O bien:

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = 2x + \Delta x$$

Finalmente apliquemos $\lim\limits_{\Delta x \to 0}$ en ambos miembros, quedando:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x + \lim_{\Delta x \to 0} (\Delta x)$$

Y puesto que, como vimos al inicio del capítulo: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} (\Delta x) = 0$, nos queda:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = 2x$$

El resultado anterior muestra ya una expresión para la primera de las variaciones de nuestro ejemplo. Por lo general, se dice que *si el límite del miembro izquierdo existe*, el resultado, o sea la primera variación es llamado *derivada* de la función $f(x)$, la cual es denotada como $f'(x)$. De aquí se sigue que la derivada de la función $f(x) = x^2$, es $f'(x) = 2x$.

Si hacemos el mismo procedimiento para el ejemplo del inciso b) anterior, tendremos:

1. La diferencia:

$$f(x + \Delta x) - f(x) + \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\Delta x - \frac{1}{8}x^{\frac{-3}{2}}(\Delta x)^2 + \ldots$$

2. La división por Δx:

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\frac{\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\Delta x-\frac{1}{8}x^{\frac{-3}{2}}(\Delta x)^2+\dots}{\Delta x}=$$

$$=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\Delta x-\frac{1}{8}x^{\frac{-3}{2}}\Delta x+\dots$$

3. La aplicación del límite $\lim_{\Delta x \to 0}$:

$$\lim_{\Delta x \to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\Delta x-\frac{1}{8}x^{\frac{-3}{2}}\Delta x+\dots\right)=$$

$$=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}-\lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{1}{8}x^{\frac{-3}{2}}\Delta x+\dots\right)$$

4. Y puesto que $\lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{1}{8}x^{\frac{-3}{2}}\Delta x+\dots\right)=0$, resulta que:

$$\lim_{\Delta x \to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$$

O bien:

$$f'(x)=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$$

En la aplicación del límite $\lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{1}{8}x^{\frac{-3}{2}}\Delta x+\dots\right)=0$, es claro que los coeficientes subsecuentes al desarrollo en serie tienen asociados incrementos de grado dos en adelante cuyo límite cuando $\Delta x \to 0$, es a su vez cero.

Si echamos un vistazo a la ecuación de variaciones [4-2] a la luz de estas ideas, tendríamos el siguiente esquema:

$$\lim_{\Delta x \to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=A+\lim_{\Delta x \to 0}(B\Delta x+C(\Delta x)^2+\dots)$$

O bien:

$$f'(x)=\lim_{\Delta x \to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=A$$

De aquí que la primera variación, en este caso representada por el coeficiente A, tenga por significado la función derivada de $f(x)$.

De esto último destacan los siguientes resultados, que escribiremos en forma de proposiciones:

Llamaremos derivada a la primera variación contenida en la ecuación [4-2], la cual denotaremos como:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = A$$

Si este límite existe.

[4-3]

No obstante, la primera variación vista a partir de la derivada tomará otros significados importantes que habremos de estudiar más adelante. En el sentido de los resultados que hasta ahora obtuvimos, diremos, por lo pronto, que la derivada es también una función que se *deriva* de $f(x)$. Desde este punto de vista, en esta sección nos habremos de conformar con estudiar las derivadas de las diferentes funciones que en capítulos anteriores hemos ya analizado.

Podemos reescribir la expresión [4-2] de la ecuación de variaciones a partir de la derivada $f'(x)$ como:

$$f(x + \Delta x) = f(x) + f'(x)\Delta x + B(\Delta x)^2 + C(\Delta x)^3 + \ldots$$

Si de esta última formamos una función $P(\Delta x)$ que agrupe los coeficientes B, C, D, etc., asociados con incrementos de grado dos en adelante, como: $P(\Delta x) = B(\Delta x)^2 + C(\Delta x)^3 + \ldots$, nos quedará:

$$f(x + \Delta x) = f(x) + f'(x)\Delta x + P(\Delta x)$$

[4-4]

En el entendido que $\lim_{\Delta x \to 0} P(\Delta x) = 0$.

4.1.4. FÓRMULAS BÁSICAS

En los ejercicios vistos anteriormente, hemos utilizado un método para derivar funciones que comúnmente es llamado como *derivación por incrementos*. Este procedimiento es fundamental porque permite entender el significado inmediato de la derivada de una función, la cual en esencia es otra función. Afianzaremos el método que hemos planteado en líneas arriba con algunos ejemplos más que a su vez nos ayudarán a establecer las *reglas de derivación* de uso elemental.

EJEMPLO 1

Aplicando el teorema del binomio y el método de derivación por incrementos, encuentre la derivada de la función $f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x}}{x}$.

SOLUCIÓN:

Para evitar pasos inútiles en el proceso, hagamos:

$$f(x) = x^{\frac{1}{3}} x^{-1} = x^{\frac{-2}{3}}$$

Incrementando esta última y desarrollando el binomio, queda:

$$f(x + \Delta x) = (x + \Delta x)^{\frac{-2}{3}} = x^{\frac{-2}{3}} - \frac{2}{3} x^{\frac{-5}{3}} \Delta x + \frac{5}{9} x^{\frac{-8}{3}} (\Delta x)^2 - \ldots$$

De aquí que la diferencia es:

$$f(x + \Delta x) - f(x) = -\frac{2}{3} x^{\frac{-5}{3}} \Delta x + \frac{5}{9} x^{\frac{-8}{3}} (\Delta x)^2 - \ldots$$

Dividiendo por el incremento Δx y aplicando el límite $\lim\limits_{\Delta x \to 0}$, resulta:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = -\frac{2}{3} x^{\frac{-5}{3}} + \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{5}{9} x^{\frac{-8}{3}} \Delta x - \ldots \right)$$

Por la regla [4-3], hagamos:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Resultando la función derivada:

$$f'(x) = -\frac{2}{3} x^{\frac{-5}{3}}$$

EJEMPLO 2

Encuentre la derivada de la función constante $f(x) = k$.

SOLUCIÓN:

Incrementando la función, queda:

$$f(x + \Delta x) = k$$

O bien:

$$f(x + \Delta x) - f(x) = 0$$

Siendo:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = 0$$

La derivada de $f(x) = k$, es $f'(x) = 0$.

De aquí que se haga necesario enunciar que:

La derivada de la función constante f(x) = k, *es* f′(x) = 0.

[4-5]

En el caso de la función $f(x) = 3$, su derivada es $f'(x) = 0$.

EJEMPLO 3

Determine la derivada de la función lineal $f(x) = mx + b$.

SOLUCIÓN:

Incrementando y desarrollando la función, queda:

$$f(x + \Delta x) = (mx + b) + m\Delta x$$

Haciendo $f(x) = mx + b$ y la diferencia:

$$f(x + \Delta x) - f(x) = m\Delta x$$

Dividiendo por el incremento Δx y aplicando el límite $\lim\limits_{\Delta x \to 0}$:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = m$$

Luego: $f'(x) = m$.

Del resultado anterior podemos afirmar que *la derivada de la función lineal* $f(x) = mx + b$, *es su propia pendiente* m, es decir:

$$f'(x) = m \qquad [4\text{-}6]$$

El caso más simple se presenta para la función identidad $f(x) = x$, cuya derivada es $f'(x) = 1$, dado que en f la pendiente es $m = 1$.

EJEMPLO 4

Encuentre la derivada de la función $cf(x)$, con c número real.

SOLUCIÓN:

Incrementando la función y aplicando el desarrollo de la regla [4-2], queda:

$$cf(x + \Delta x) = c(f(x) + f'(x)\Delta x + B(\Delta x)^2 + \ldots)$$

Así:

$$cf(x + \Delta x) = cf(x) + cf'(x)\Delta x + cB(\Delta x)^2 + \dots$$

Haciendo la diferencia, dividiendo por el incremento Δx y aplicando el límite $\lim_{\Delta x \to 0}$:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{cf(x + \Delta x) - cf(x)}{\Delta x} = cf'(x) + \lim_{\Delta x \to 0} (cB\Delta x + \dots)$$

Finalmente:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{cf(x + \Delta x) - cf(x)}{\Delta x} = cf'(x)$$

El resultado manifiesta que:

La derivada de una función multiplicada por una constante es igual a la constante multiplicada por la derivada de la función. Enumeremos este resultado como:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{cf(x + \Delta x) - cf(x)}{\Delta x} = cf'(x) \qquad [4\text{-}7]$$

EJEMPLO 5

Encuentre la derivada $f'(u)$ de la función potencia $f(u) = u^n$, donde n puede tomar cualquier número real.

SOLUCIÓN:

Incrementando la función en Δu y desarrollando el binomio, queda:

$$f(u + \Delta u) = (u + \Delta u)^n = u^n + nu^{n-1}\Delta u + \frac{n(n-1)u^{n-2}}{2!}(\Delta u)^2 + \dots$$

De manera que:

$$f(u + \Delta u) = f(u) + nu^{n-1}\Delta u + \frac{n(n-1)u^{n-2}}{2!}(\Delta u)^2 + \dots$$

O bien:

$$\lim_{\Delta u \to 0} \frac{f(u + \Delta u) - f(u)}{\Delta u} = nu^{n-1} + \lim_{\Delta u \to 0} \left(\frac{n(n-1)u^{n-2}}{2!}\Delta u + \dots \right)$$

Finalmente:

$$f'(u) = nu^{n-1} \qquad [4\text{-}7]$$

Observe que este ejemplo es un caso particular del teorema del binomio.

Este último ejemplo es importante porque la derivada de la función potencia $f(u) = u^n, f'(u) = nu^{n-1}$, evitará, que derivemos usando el método de derivación por incrementos haciendo más sencillo el proceso. En lo que sigue utilizaremos la regla [4-7] para determinar la mayoría de las derivadas de funciones algebraicas.

EJEMPLO 6

Haciendo uso de la regla [4-7] y anteriores, encuentre la derivada de la función $f(x) = \dfrac{4x^3 + 5x^2 - 1}{\sqrt[5]{x}}$.

SOLUCIÓN:

Antes de derivar acomodemos la función de la siguiente manera:

$$f(x) = x^{\frac{-1}{5}}(4x^3 + 5x^2 - 1) = 4x^{\frac{14}{5}} + 5x^{\frac{9}{5}} - x^{\frac{-1}{5}}$$

Enseguida derivemos cada variable involucrada en la función, haciendo uso de las reglas [4-4] y [4-7], quedando:

$$f'(x) = 4\left(\frac{14}{5}\right)x^{\frac{9}{5}} + 5\left(\frac{9}{5}\right)x^{\frac{4}{5}} - \left(-\frac{1}{5}\right)x^{\frac{-6}{5}}$$

Siendo la derivada buscada:

$$f'(x) = \frac{56}{5}x^{\frac{9}{5}} + 9x^{\frac{4}{5}} + \frac{1}{5}x^{\frac{-6}{5}}$$

Otra forma alternativa de operar la derivada de una función, es haciendo uso de la siguiente notación:

$$D_x(y) = f'(x) \qquad [4\text{-}8]$$

O también la conocida $y' = f'(x)$. Otras opciones tienen que ver con el cociente de diferenciales que trataremos más adelante.

La regla [4-8] tiene el mismo significado operativo de la derivada $f'(x)$ como hasta ahora le hemos utilizado. Así por ejemplo, la operación $D_x(5x^2 - 1) = 10x$, significa que se pide derivar la función $f(x) = 5x^2 - 1$, cuya variable independiente es x, y que tiene por derivada $f'(x) = 10x$. Haremos uso indistinto de los tres modos de notación: D_x, y' y f', incluso los combinaremos, en los problemas subsecuentes.

4.1.5. DERIVADA DE LAS FUNCIONES SUMA, PRODUCTO Y COCIENTE Y COMPOSICIÓN

Supongamos dos funciones $u(x)$ y $v(x)$ desarrolladas a partir de la regla [4-4], como:

$$\begin{cases} u(x) \to u(x + \Delta x) = u(x) + u'(x)\Delta x + P(\Delta x) & (1) \\ v(x) \to v(x + \Delta x) = v(x) + v'(x)\Delta x + Q(\Delta x) & (2) \end{cases}$$

Para determinar la derivada de la suma de ambas funciones sumemos los desarrollos (1) y (2), quedando:

$$u(x + \Delta x) = (u(x) + u'(x)\Delta x + P(\Delta x)) + (v(x + \Delta x) = v(x) + v'(x)\Delta x + Q(\Delta x))$$

Sumando término a término:

$$u(x + \Delta x) + v(x + \Delta x) = y(x) + v(x) + u'(x)\Delta x + v'(x)\Delta x + P(\Delta x) + Q(\Delta x)$$

Ordenando la suma a partir del grado de los incrementos:

$$u(x + \Delta x) + v(x + \Delta x) - u(x) + v(x) = (u'(x) + v'(x))\Delta x + P(\Delta x) + Q(\Delta x)$$

Dividiendo por Δx y aplicando límite cuando $\Delta x \to 0$, queda:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x + \Delta x) + v(x + \Delta x) - u(x) + v(x)}{\Delta x} =$$
$$= (u'(x) + v'(x)) + \lim_{\Delta x \to 0} (P(\Delta x) + Q(\Delta x))$$

Puesto que $\lim_{\Delta x \to 0} (P(\Delta x) + Q(\Delta x)) = 0$, resulta que:

$$D_x(u(x) + v(x)) = u'(x) + v'(x) \qquad [4\text{-}9]$$

Lo anterior se puede atestiguar en la siguiente proposición:

La derivada de la suma de dos funciones es la suma de las derivadas de ambas funciones.

Sin perder su significado, la regla [4-9] se puede escribir como:

$$D_x(u(x) + v(x)) = D_x u(x) + D_x v(x)$$

De manera semejante podemos operar para determinar la derivada del producto de las dos funciones, o sea $D_x(u(x) \cdot v(x))$. Para ello multipliquemos término a término los desarrollos (1) y (2), como:

$$\begin{aligned} u(x + \Delta x) &= u(x) + u'(x)\Delta x + P(\Delta x) \\ v(x + \Delta x) &= v(x) + v'(x)\Delta x + Q(\Delta x) \\ \hline u(x + \Delta x) \cdot v(x + \Delta x) &= u(x)v(x) + v(x)u'(x)\Delta x + v(x)P(\Delta x) \\ &\quad + u(x)v'(x)\Delta x + u'(x)\Delta x \cdot v'(x)\Delta x + v'(x)\Delta x P(\Delta x) \\ &\quad + u(x)Q(\Delta x) + u'(x)\Delta x Q(\Delta x) + Q(\Delta x)P(\Delta x) \end{aligned}$$

Ordenando el resultado a partir de los grados de los incrementos, dividiendo además por Δx, y aplicando límite cuando $\Delta x \to 0$:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x + \Delta x) \cdot v(x + \Delta x) - u(x)v(x)}{\Delta x} = v(x)u'(x) + u(x)v'(x) +$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} (v(x)P(\Delta x) + u'(x) \cdot v'(x) + v'(x)P(\Delta x) + u(x)Q(\Delta x) + u'(x)Q(\Delta x) + Q(\Delta x)P$$

Y puesto que el límite del resto:

$$\lim_{\Delta x \to 0} (v(x)P(\Delta x) + u'(x) \cdot v'(x) + v'(x)P(\Delta x) + u(x)Q(\Delta x) + u'(x)Q(\Delta x) + + Q(\Delta x)P(\Delta x) = 0$$

Además:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x + \Delta x) \cdot v(x + \Delta x) - u(x)v(x)}{\Delta x} = D_x(u(x) \cdot v(x))$$

Luego queda:

$$D_x(u(x) \cdot v(x)) = v(x)u'(x) + u(x)v'(x) \qquad [4\text{-}10]$$

O bien:

$$D_x(u(x) \cdot v(x)) = v(x)D_xu(x) + u(x)D_xv(x)$$

La regla [4-10] pone de manifiesto que:

La derivada del producto de dos funciones es igual a la primera función por la derivada de la segunda, más la segunda función por la derivada de la primera:

$$D_x(u(x) \cdot v(x)) = v(x)D_xu(x) + u(x)D_xv(x)$$

En su forma operativa, la regla [4-10] nos hará llegar a un resultado todavía más valioso. Para el efecto, hagamos $u(x) = v(x)$, de modo que determinemos la derivada de $(u(x))^2$ como $D_x(u(x) \cdot u(x))$, es decir:

$$D_x(u(x) \cdot u(x)) = u(x)D_xu(x) + u(x)D_xu(x)$$

O sea:

$$D_x(u(x) \cdot u(x)) = 2u(x)D_xu(x)$$

Luego:

$$D_x[(u(x))^2] = 2u(x)D_xu(x)$$

Si para el mismo ejercicio hubiéramos usado la regla de la derivada de la función potencia $f'(u) = nu^{n-1}$, esta nos hubiera limitado a solamente el resultado $D_x[(u(x))^2] = 2u(x)$. Ocurre que para este último $D_x(u(x) \cdot u(x)) = 2u(x)D_xu(x)$, hicimos la composición de la función $(u(x))^2$ como $(u(x))^2 = u(x) \cdot u(x)$, de modo que la derivada de esta composición no es solamente $2u(x)$, sino la derivada de la función así compuesta, es decir, $D_x[(u(x))^2] = 2u(x)D_xu(x)$.

Si continuamos con esta idea haciendo $(u(x))^3 = u(x) \cdot u^2(x)$, usando la regla [4-10], tendremos que la derivada respectiva, es:

$$D_x[u(x) \cdot u^2(x)] = u(x) \cdot 2u(x)D_xu(x) + u^2(x) \cdot D_xu(x)$$

O bien:

$$D_x[u(x) \cdot u^2(x)] = 3u^2(x) \cdot D_xu(x)$$

El caso que se sigue, es:

$$D_x[u^4(x)] = D_x[u(x) \cdot u^3(x)] = 4u^3(x) \cdot D_x u(x)$$

Si generalizamos el producto para el caso de la función compuesta u^n, como:

$$u^n(x) = \underbrace{u(x) \cdot u(x) \cdot u(x) \ldots u(x)}_{n \text{ veces}} = u(x)[u(x)]^{n-1}$$

Esta tendrá por derivada:

$$D_x[u^n(x)] = D_x[u(x) \cdot [u(x)]^{n-1}] = n[u(x)]^{n-1} D_x u(x)$$

De esta última se desprende que cuando $u = x$, $D_x(x^n) = nx^{n-1}$ (puesto que $D_x(x) = 1$) se llega a la regla [4-7] que ya hemos usado.

Finalmente, fijaremos la regla de la derivada de la función potencia en sus dos formas (derivada de la función composición), como:

$$\begin{cases} D_x(x^n) = nx^{n-1} \\ D_x[u^n(x)] = nu(x)^{n-1} D_x u(x) \end{cases} \qquad [4\text{-}11]$$

Con las reglas [4-11] podemos determinar las derivadas de funciones compuestas, combinándolas así con las propias reglas aplicadas anteriormente.

EJEMPLO 1

Calcúlese $D_x(\sqrt[3]{4x^3 - 3x + 2})$.

SOLUCIÓN:

Escribamos la operación como: $D_x(4x^3 - 3x + 1)^{\frac{1}{3}}$. Puesto que se desea derivar la función compuesta en la que $u(x) = 4x^3 - 3x + 2$, con $D_x u(x) = 12x^2 - 3$, la operación inicial se puede ver como $D_x(u)^{\frac{1}{3}}$. Usemos en esta última la segunda regla de la proposición [4-11] y hagamos:

$$D_x(u(x))^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3} u^{\frac{-2}{3}} D_x u(x)$$

Es decir:

$$D_x(\sqrt[3]{4x^3 - 3x + 2}) = \frac{1}{3}(4x^3 - 3x + 2)^{\frac{-2}{3}}(12x^2 - 3)$$

O bien:

$$D_x(\sqrt[3]{4x^3 - 3x + 2}) = \frac{(12x^2 - 3)}{3\sqrt[3]{(4x^3 - 3x + 2)^2}} = \frac{4x^2 - 1}{\sqrt[3]{(4x^3 - 3x + 2)^2}}$$

EJEMPLO 2

Determinar la derivada de la función $y = (4x^2 + 2)^5\sqrt{x^3 - 1}$.

SOLUCIÓN:

Acomodemos la función de la siguiente manera: $y = (4x^2 + 2)^5(x^3 - 1)^{\frac{1}{2}}$. Usemos enseguida la regla del producto [4-10] $D_x(u(x) \cdot v(x)) = v(x)D_xu(x) + u(x)D_xv(x)$ indicando la derivación como:

$$y' = (4x^2 + 2)^5 D_x(x^3 - 1)^{\frac{1}{2}} + (x^3 - 1)^{\frac{1}{2}} D_x(4x^2 + 2)^5$$

Prosigamos aplicando enseguida la regla [4-11] $D_x[u^n(x)] = nu(x)^{n-1}D_xu(x)$ para cada una de las derivadas que haya que calcular, así:

$$y' = (4x^2 + 2)^5\left[\frac{1}{2}(x^3 - 1)^{-\frac{1}{2}} D_x(x^3 - 1)\right] + (x^3 - 1)^{\frac{1}{2}}[5(4x^2 + 2)^4 D_x(4x^2 + 2)]$$

$$y' = (4x^2 + 2)^5\left[\frac{1}{2}(x^3 - 1)^{-\frac{1}{2}} \cdot (3x^2)\right] + (x^3 - 1)^{\frac{1}{2}}[5(4x^2 + 2)^4 \cdot (8x)]$$

$$y' = \frac{3x^2(4x^2 + 2)^5}{2\sqrt{x^3 - 1}} + 40x(4x^2 + 2)^4(x^3 - 1)^{\frac{1}{2}}$$

Siendo común denominador $2\sqrt{x^3 - 1}$, se tiene:

$$y' = \frac{3x^2(4x^2 + 2)^5 + 40x(4x^2 + 2)^4(x^3 - 1)^{\frac{1}{2}}\left[2(x^3 - 1)^{\frac{1}{2}}\right]}{2\sqrt{x^3 - 1}}$$

Así:

$$y' = \frac{3x^2(4x^2 + 2)^5 + 80x(4x^2 + 2)^4(x^3 - 1)}{2\sqrt{x^3 - 1}}$$

Factorizando en el numerador $(4x^2 + 2)^4$, se tiene por derivada:

$$y' = \frac{(4x^2 + 2)^4[92x^4 + 15x^2 - 80x]}{2\sqrt{x^3 - 1}}$$

Derivada del cociente

La derivada del cociente de dos funciones $\frac{u(x)}{v(x)}$ resulta sencilla al aplicar para su determinación las proposiciones [4-10] del producto y [4-11] de la composición.

Coloquemos el cociente $\frac{u(x)}{v(x)}$ como el producto $u(x) \cdot [v(x)]^{-1}$ y derivemos como tal, quedando:

$$D_x\{u(x) \cdot [v(x)]^{-1}\} = u(x)D_x[v(x)]^{-1} + [v(x)]^{-1}D_xu(x)$$

Puesto que la función $[v(x)]^{-1}$ es una composición, su derivada se expresa como $D_x[v(x)]^{-1} = -[v(x)]^{-2}D_xv(x)$, así:

$$D_x\{u(x) \cdot [v(x)]^{-1}\} = u(x)[-[v(x)]^{-2}]D_xv(x) + [v(x)]^{-1}D_xu(x)$$

O sea:

$$D_x\{u(x) \cdot [v(x)]^{-1}\} = \frac{-u(x)}{[v(x)]^2}D_xv(x) + \frac{1}{[v(x)]}D_xu(x)$$

Esta tiene por común denominador $[v(x)]^2$. Luego:

$$D_x\left\{\frac{u(x)}{v(x)}\right\} = \frac{-u(x)D_xv(x) + v(x)D_xu(x)}{[v(x)]^2} = \frac{v(x)D_xu(x) - u(x)D_xv(x)}{[v(x)]^2}$$

$$D_x\left\{\frac{u(x)}{v(x)}\right\} = \frac{v(x)D_xu(x) - u(x)D_xv(x)}{[v(x)]^2} \qquad [4\text{-}12]$$

La relación [4-12] establece que: *La derivada del cociente de dos funciones es igual a la función en el denominador multiplicada por la derivada de la función en el numerador, menos la función en el numerador multiplicada por la derivada de la función en el denominador, todo ello entre la función en el denominador elevada al cuadrado*.

La demostración por sí misma enseña que el cociente de dos funciones puede acomodarse como el producto de ambas, de manera que para encontrar su derivada sea posible usar la regla del producto [4-10].

EJEMPLO 3

Determine la derivada de la función $f(x) = \left(\frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} + 1}\right)^{\frac{1}{2}}$.

SOLUCIÓN:

El ejemplo se presta para hacer uso de la regla de la potencia [4-11] combinada con la regla del cociente [4-12]. Antes, habrá que expresar la función como $f(u) = u^{\frac{1}{2}}$, siendo $u = \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} + 1}$. De esta manera:

$$f'(u) = \frac{1}{2}u^{\frac{-1}{2}}D_xu$$

Es decir:

$$f'(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} + 1}\right)^{\frac{-1}{2}} D_x\left(\frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} + 1}\right) \quad (1)$$

Y por la regla [4-12] de la derivada del cociente, queda:

$$D_x\left(\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}\right)=\frac{(\sqrt{x}+1)D_x\left(x^{\frac{1}{2}}-1\right)-(\sqrt{x}-1)D_x\left(x^{\frac{1}{2}}+1\right)}{(\sqrt{x}+1)^2}$$

$$D_x\left(\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}\right)=\frac{(\sqrt{x}+1)\left(\frac{1}{2}x^{\frac{-1}{2}}\right)-(\sqrt{x}-1)\left(\frac{1}{2}x^{\frac{-1}{2}}\right)}{(\sqrt{x}+1)^2}=$$

$$=\frac{\frac{1}{2}x^{\frac{-1}{2}}[(\sqrt{x}+1)-(\sqrt{x}+1)]}{(\sqrt{x}+1)^2}$$

$$D_x\left(\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}\right)=\frac{\frac{1}{2}x^{\frac{-1}{2}}(2)}{(\sqrt{x}+1)^2}=\frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)^2}$$

Sustituyendo esta última en (1), se tiene:

$$f'(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}\right)^{\frac{-1}{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{x}\cdot(\sqrt{x}+1)^2}\right)=$$

$$=\frac{1}{2\dfrac{(\sqrt{x}-1)^{\frac{1}{2}}}{(\sqrt{x}+1)^{\frac{1}{2}}}}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}\cdot(\sqrt{x}+1)^2}$$

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}\cdot(\sqrt{x}-1)^{\frac{1}{2}}(\sqrt{x}+1)^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{2\cdot\sqrt{x}\sqrt{\sqrt{x}-1}\sqrt{(\sqrt{x}+1)^3}}$$

$$f'(x)=\frac{1}{2\cdot\sqrt{x(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)^3}}$$

Habrá que aceptar que para alguien que se inicia en la derivación, el ejemplo anterior no es sencillo. Sin embargo, la intención con éste ha sido solamente mostrar la bondad de las reglas de derivación que hasta aquí hemos obtenido.

4.1.6. DERIVACIÓN Y CONTINUIDAD

La siguiente proposición establece una relación de dependencia entre la derivación y continuidad de una función.

Si una función f(x) *tiene derivada en un punto* x = a*, será continua en* x = a.

[4-13]

Demostración:

Consideremos la identidad $f(x + \Delta x) - f(x) = \dfrac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}\Delta x.$

Al hacer $\Delta x \to 0$, el cociente $\dfrac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ es $f'(x)$, o sea, es un límite determinado, o bien es un límite que existe. Consecuentemente el producto $\dfrac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}\Delta x$ es cero, es decir, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} f(x + \Delta x) - f(x) = 0$, ello sugiere que el límite existe y es cero. Por tanto podemos afirmar que la función $f(x)$ es continua. No obstante la inversa de la proposición 4-13 no necesariamente es cierta (Véase el ejemplo 2).

EJEMPLO 1

Verifique la continuidad de la derivada de la función $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$ en $x = 2$, es decir, pruebe que $f'(2)$ existe.

Derivando la función queda:

$$f'(x) = \frac{(x - 1)(1) - (x + 1)(1)}{(x - 1)^2} = \frac{-2}{(x - 1)^2}$$

De aquí que:

$$f'(2) = \frac{-2}{(2 - 1)^2} = -2$$

Puesto que $x = 2$ esta definido en la función derivada, esta última es continua en $x = 2$, o bien existe en ese valor.

EJEMPLO 2

Pruebe que la derivada de la función $f(x) = \sqrt[3]{(x - 1)^2}$, no existe en $x = 1$.

SOLUCIÓN:

Deseamos probar que $f'(1)$ no existe. Derivemos la función anterior, quedando:

$$f'(x) = \frac{2}{3}(x - 1)^{\frac{-1}{3}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x - 1}}$$

De aquí que:

$$f'(1) = \frac{2}{3\sqrt[3]{1 - 1}} = \frac{2}{0}$$

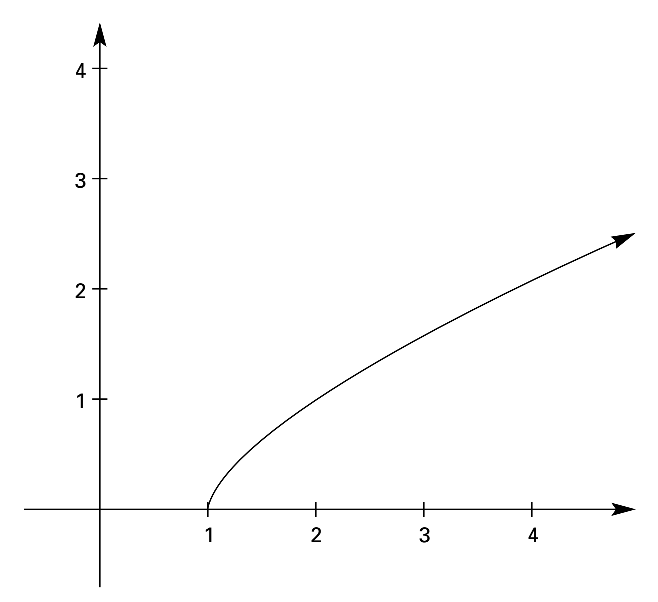


FIGURA 4.1. Gráfica de $f(x) = \sqrt[3]{(x-1)^2}$.

Puesto que la derivada se indetermina para $x = 1$, se puede concluir que la derivada no existe para ese valor. No obstante la función f es continua en $x = 1$, véase la gráfica de la función en la Figura 4.1.

ACTIVIDADES Y EJERCICIOS DE LA SECCIÓN 4.1

I. Haciendo uso del teorema del binomio de Newton y del método de derivación por incrementos, encuentre las derivadas de las siguientes funciones reduciéndolas a la definición: $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$.

1. $f(x) = 5x - 2$

2. $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt[5]{x}}$

3. $f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x}}{x^4}$

4. $f(x) = 4x^2 - x + 3$

5. $f(x) = \sqrt{x} \cdot (x + 1)^2$

6. $f(x) = 5x^3 - \dfrac{3}{x^2}$

II. Use las reglas elementales de derivación, así como la derivada de la función potencia: nx^{n-1}, para encontrar la derivada de las siguientes funciones.

7. $f(x) = 5x^3 - 4x^2 + 3x - 1$

8. $f(x) = \dfrac{x^{\frac{3}{2}} + 4x^2 - 0{,}66x + 7}{\sqrt[5]{x}}$

9. $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x}} + \dfrac{\sqrt{x}}{x}$

10. $f(x) = x^2 + \dfrac{1}{x^2} + 3x^{-1} + 4$

11. $f(x) = (4x - 3)^2$

12. $f(x) = \sqrt{x - 1}$

III. Utilice las reglas vistas en esta sección para determinar la derivada de las siguientes funciones.

13. $y = (5x + 1)(7x - 1)$

14. $y = (3x^2 + 5x - 1(-x^2 + 2x) + 3)$

15. $y = (4 - x^2)(1 - 2x^2)$

16. $y = (ax + b)(cx + d)$

17. $y = x(3x - 1)(5x - 2)$

18. $y = (x - 1)(x - 2)(x - 3)$

19. $y = \dfrac{3}{x^2 + 1}$

20. $y = \dfrac{3x}{x^2 + 1}$

21. $y = x - \dfrac{32}{1 - x}$

22. $y = \left(2x - \dfrac{\pi}{3}\right)(x^2 - 5x)$

23. $y = \left(\dfrac{1 + x}{1 - x}\right)$

24. $y = \dfrac{ax + b}{cx + d}$

25. $y = \dfrac{x^2 - x}{x^2 + 1}$

26. $y = \dfrac{4x^2 - 1}{2(x - 1)}$

27. $y = \dfrac{(x - 2)^2}{(x + 1)^2}$

28. $y = \dfrac{x^a - 1}{x^b - 1}$

29. $y = \dfrac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{\sqrt{x - a}}$

30. $y = (3 + x)^2\sqrt{(1 - 2x)^2}$

31. $y = (a + bx^r)^p$

32. $y = (4x^2 - 2x + 1)^3$

33. $y = (x^e + x^m)^k$

34. $y = \sqrt{a^2 + x^2}$

35. $y = (ax + b)^2 - (ax - b)^2$

36. $y = \sqrt{3} - 8\sqrt{x^2 - 1}$

37. $y = \dfrac{-8}{(x^4 + 1)^5}$

38. $y = \dfrac{2a}{(\sqrt{x} + 5)^n}$

39. $y = \dfrac{a}{2x - \sqrt{x}}$

40. $y = a + \dfrac{4\sqrt{x}}{3 + x^2}$

41. $y = (2x - 5x^3)^3$

42. $y = \dfrac{-3}{x^3 + 2x}$

43. $y = \sqrt{2 + \sqrt{2x}}$

44. $y = \sqrt{(x^2 + 2)(x - 4)}$

45. $y = \sqrt{\dfrac{x-2}{x+1}}$

46. $y = \sqrt{\dfrac{2x-3}{3x+1}}$

47. $y = \dfrac{\sqrt{x^2-5x+6}}{x+1}$

48. $y = \sqrt{\dfrac{x^2+1}{x^2-1}}$

49. $y = \sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$

50. $y = \dfrac{x}{x+\sqrt{1-x^2}}$

51. $y = \sqrt{5+\sqrt{5x+\sqrt{5x}}}$

52. $y = \dfrac{1}{\sqrt{5+\sqrt{5x+\sqrt{5x}}}}$

4.2. DERIVACIÓN DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS, LOGARÍTMICA, EXPONENCIAL Y TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

La función $f(x) = \text{sen } x$ tiene por derivada a $\cos x$, o sea, $D_x(\text{sen } x) = \cos x$.
Demostración:
Incrementemos la función x en Δx, quedando, por la regla [4-4]:

$$\text{sen }(x + \Delta x) = f(x) + f'(x)\Delta x + P(\Delta x) \quad (1)$$

Es decir:

$$\text{sen }(x + \Delta x) - \text{sen } x = f'(x)\Delta x + P(\Delta x) \quad (1)$$

Si hacemos uso de la identidad: $\text{sen } a - \text{sen } b = 2 \text{ sen } \dfrac{a-b}{2} \cos \dfrac{a+b}{2}$, cambiaremos el miembro derecho de la última expresión (1) por:

$$\text{sen }(x + \Delta x) - \text{sen } x = 2 \text{ sen} \left[\frac{x + \Delta x - x}{2}\right] \cos \left[\frac{x + \Delta x + x}{2}\right]$$

O bien:

$$\text{sen }(x + \Delta x) - \text{sen } x = 2 \text{ sen} \left(\frac{\Delta x}{2}\right) \cos \left[x + \frac{\Delta x}{2}\right]$$

Dividiendo ambos miembros por Δx:

$$\frac{\text{sen }(x + \Delta x) - \text{sen } x}{\Delta x} = \frac{\text{sen}\left(\dfrac{\Delta x}{2}\right)}{\dfrac{\Delta x}{2}} \cos \left[x + \frac{\Delta x}{2}\right]$$

Aplicando $\lim\limits_{\Delta x \to 0}$, queda:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(x + \Delta x) - \operatorname{sen} x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\operatorname{sen}\left(\dfrac{\Delta x}{2}\right)}{\dfrac{\Delta x}{2}} \cos\left[x + \frac{\Delta x}{2}\right] \right)$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(x + \Delta x) - \operatorname{sen} x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\operatorname{sen}\left(\dfrac{\Delta x}{2}\right)}{\dfrac{\Delta x}{2}} \cdot \cos\left(x + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{2}\right)$$

Y puesto que $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen}\left(\dfrac{\Delta x}{2}\right)}{\dfrac{\Delta x}{2}} = 1$, véase la proposición [3-7-10], además:

$$\cos\left(x + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{2}\right) = \cos x$$

Resulta que:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(x + \Delta x) - \operatorname{sen} x}{\Delta x} = D_x(\operatorname{sen} x) = \cos x$$

Conviene generalizar la expresión como una función compuesta, de manera que:

$$D_u(\operatorname{sen} u) = \cos u \cdot D_x u \qquad [4\text{-}13]$$

Es suficiente con haber demostrado el resultado de la derivada de la función seno para determinar el resto de las funciones trigonométricas. En lo que sigue será suficiente con hacer uso de las identidades convenientes y de la regla [4-13] para obtenerlas.

Para llegar a la derivada del coseno hagamos uso de la identidad:

$$y = \cos u = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - u\right)$$

De modo que derivando esta última con la regla [4-13], queda:

$$y' = \cos\left(\frac{\pi}{2} - u\right) D_x\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{2} - u\right) D_x u$$

Y puesto que $\cos\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = -\text{sen } u$, podemos afirmar que: *la derivada del coseno es la propia función seno multiplicada por menos uno:*

$$D_u(\cos u) = -\text{sen } u D_x u \qquad [4\text{-}14]$$

EJEMPLO 1

Calcular la derivada de la función $y = \text{sen } 2x$.

SOLUCIÓN:

Haciendo uso de la proposición [4-13], se tiene:

$$D_x(\text{sen } 2x) = \cos 2x D_x(2x) = \cos 2x[2] = 2 \cos 2x$$

En este caso el producto $\cos 2x[2]$, no significa que deba multiplicarse el argumento $(2x)$ por [2], como: $\cos 4x$, el corchete que contiene al 2 es una *barrera* que impide esto último, de aquí que $\cos 2x[2] = [2] \cos 2x = 2 \cos 2x$.

EJEMPLO 2

Calcular la derivada de la función $y = \cos^2 2x$.

SOLUCIÓN:

La expresión debe verse como $y = (\cos 2x)^2$ (es falso concebirla como $y = \cos (2x)^2$). Haciendo uso de las proposiciones [4-11] y [4-14], llegamos a:

$$y' = 2(\cos 2x)D_x(\cos 2x) = 2 \cos x(-\text{sen } 2x)D_x(2x)$$

De aquí que la derivada queda como:

$$y' = -2 \text{ sen } x \cdot \cos x \cdot [2] = -4 \text{ sen } 2x$$

Puesto que $\text{sen } 2x \equiv 2 \text{ sen } x \cdot \cos x$.

EJEMPLO 3

Calcular la derivada de la función $y = 3 \text{ sen}^2 x \cos 2x$.

SOLUCIÓN:

Dispongamos la función como: $y = 3[(\text{sen } x)^2 \cos 2x]$. Indiquemos primero la derivada del producto entre el corchete como:

$$y' = 3[(\text{sen } x)^2 D_x(\cos 2x) + \cos 2x D_x(\text{sen } x)^2]$$

Derivemos, usando la regla de [4-11] de la derivada de una función compuesta, la última expresión:

$$y' = 3[(\text{sen } x)^2(-\text{sen } 2x)(2) + \cos 2x \,(2 \text{ sen } x \cdot \cos x)]$$

$$y' = 3[-2 \text{ sen } 2x \cdot \text{sen}^2 x + \cos 2x \cdot \text{sen } 2x]$$

$$y' = 3 \text{ sen } 2x[-2 \text{ sen}^2 x + \cos 2x] = 3 \text{ sen } 2x\left[-2\left(\frac{1 - \cos 2x}{2}\right) + \cos 2x\right]$$

$$y' = 3 \text{ sen } 2x[1 + \cos 2x] = 3 \text{ sen } 2x + \frac{3}{2} \text{ sen } 4x$$

En el último resultado usamos continuamente la identidad del seno de ángulo doble sen $2a =$ sen a cos a.

EJEMPLO 4

Calcular la derivada de la función $y = x^2 \text{ sen } 3x$.

SOLUCIÓN:

Aplicando la regla [4-10] de la derivada del producto, tenemos:

$$y' = x^2 D_x(\text{sen } 3x) + \text{sen } 3x D_x(x^2)$$

Así:

$$y' = 3x^2 \cos 3x + 2x \text{ sen } 3x$$

EJEMPLO 5

Determinar la derivada de la función $f(x) = \sqrt{1 - \text{sen } 2x}$.

SOLUCIÓN:

Dispongamos la función como: $f(x) = (1 - \text{sen } 2x)^{\frac{1}{2}}$. De aquí que derivando, quede:

$$f'(x) = \frac{1}{2}(1 - \text{sen } 2x)^{\frac{-1}{2}} D_x(1 - \text{sen } 2x) = \frac{1}{2\sqrt{1 - \text{sen } 2x}}(-\cos 2x)D_x(2x)$$

$$f'(x) = \frac{-\cos 2x}{\sqrt{1 - \text{sen } 2x}}$$

La derivada de las funciones tangente, cotangente, secante y cosecante, se obtienen con el uso de identidades y las reglas de derivación ya vistas. Las exponemos enseguida:

Siendo: $D_u(\text{tg } u) = D_u\left(\frac{\text{sen } u}{\cos u}\right)$. Podemos derivar haciendo uso de la regla del cociente, como:

$$D_u\left(\frac{\text{sen } u}{\cos u}\right) = \frac{\cos u D_u \text{ sen } u - \text{sen } u D_u \cos u}{(\cos u)^2} =$$

$$= \frac{\cos u \cos u D_x(u) - \text{sen } u(-\text{sen } u)D_x(u)}{(\cos u)^2}$$

$$D_u(\text{tg } u) = \frac{(\cos^2 u + \text{sen}^2 u)D_x(u)}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}D_x(u) = \sec^2 uD_x(u) \quad [4-14]$$

De aquí que *la derivada de la función tangente sea la función secante elevada al cuadrado*.

La derivada de la cotangente resulta de manera similar:

$$D_u(\text{cotg } u) = -\text{cosec}^2 uD_x(u) \qquad [4\text{-}15]$$

En tanto que la derivada de la función secante, conviene acomodarla como:

$$y = \sec u = \frac{1}{\cos u} = (\cos u)^{-1}$$

Cuya derivada resulta inmediata, siendo:

$$y' = -(\cos u)^{-2}D_u(\cos u) = -(\cos u)^{-2}(-\text{sen } u)D_x u$$

Es decir:

$$y' = \frac{\text{sen } u}{\cos^2 u}D_x u = \frac{\text{sen } u}{\cos u} \cdot \frac{1}{\cos u}D_x u = \text{tg } u \cdot \sec uD_x u$$

$$D_u(\sec u) = \text{tg } u \cdot \sec uD_x u \qquad [4\text{-}16]$$

De manera semejante resulta también la derivada de la función cosecante, es decir la regla:

$$D_u(\text{cosec } u) = -\text{cotg } u \cdot \text{cosec } uD_x u \qquad [4\text{-}17]$$

EJEMPLO 6

Determine la derivada de la función $y = \sec^2 x \cdot \text{tg } x$.

SOLUCIÓN:

Haciendo uso de las reglas del producto y potencia, resulta:

$$y' = \sec^2 xD_x(\text{tg } x) + \text{tg } xD_x((\sec x)^2)$$

Luego:

$$y' = \sec^4 x + \text{tg } x(2 \sec xD_x(\sec x))$$
$$y' = \sec^4 x + \text{tg } x(2 \sec x \text{ tg } x)$$
$$y' = \sec^4 x + 2 \text{ tg}^2 x \sec x = \sec^4 x + 2(\sec^2 x - 1) \sec x$$
$$y' = \sec^4 x + 2 \sec^3 x - 2 \sec^2 x$$

EJEMPLO 7

Obtenga la derivada de la función $y = \frac{1}{x} \cdot \text{cotg}^2 x$.

SOLUCIÓN:

Acomodemos esta última como $y = x^{-1}(\text{cotg } x)^2$, indicando la derivada del producto, como:

$$y' = x^{-1}D_x[(\text{cotg } x)^2] + (\text{cotg } x)^2 D_x(x^{-1})$$
$$y' = x^{-1}(2 \text{ cotg } xD_x(\text{cotg } x)) + \text{cotg}^2 x(-x^{-2})$$
$$y' = x^{-1}(2 \text{ cotg } x(-\text{cosec}^2 x)) + \text{cotg}^2 x(-x^{-2})$$
$$y' = -\frac{2}{3} \text{cotg } x \text{ cosec}^2 x + -\frac{1}{x^2} \text{cotg}^2 x = -\frac{1}{x} \text{cotg } x\left(2 \text{ cosec}^2 x - \frac{1}{x^2} \text{cotg } x\right)$$

Para obtener la derivada de la función logaritmo natural, $y = \ln u$, incrementemos la función en Δu, como: $y = \ln(u + \Delta u)$, e igualemos con la ecuación de variaciones [4-4], o sea:

$$\ln(u + \Delta u) = f(u) + f'(u)\Delta u + P(\Delta u)$$

De aquí que:

$$\ln(u + \Delta u) - \ln u = f'(u)\Delta u + P(\Delta u)$$

Ya que $\ln a - \ln b = \ln \frac{a}{b}$:

$$\ln \frac{(u + Du)}{u} = f'(u)\Delta u + P(\Delta u)$$

Multiplicando ambos miembros por $\frac{1}{u} \cdot \frac{u}{\Delta u}$, así como $\frac{P(\Delta u)}{\Delta u} = R(\Delta u)$:

$$\frac{1}{u} \cdot \frac{u}{\Delta u} \ln \frac{(u + \Delta u)}{u} = f'(u) + R(\Delta u)$$

Puesto que $a \ln b = \ln b^a$:

$$\frac{1}{u} \cdot \ln\left(1 + \frac{\Delta u}{u}\right)^{\frac{u}{\Delta u}} = f'(u) + R(\Delta u)$$

Aplicando $\lim\limits_{\Delta u \to 0}$, queda:

$$f'(u) = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{1}{u} \ln\left(1 + \frac{\Delta u}{u}\right)^{\frac{u}{\Delta u}} - \lim_{\Delta u \to 0} - R(\Delta u) =$$

$$= \frac{1}{u} \lim_{\Delta u \to 0} \ln \left(1 + \frac{\Delta u}{u}\right)^{\frac{u}{\Delta u}} - \lim_{\Delta u \to 0} R(\Delta u)$$

Y puesto que $\lim_{\Delta u \to 0} \ln \left(1 + \frac{\Delta u}{u}\right)^{\frac{u}{\Delta u}} = 1$, véase la proposición [3-7-6], así como $\lim_{\Delta u \to 0} R(\Delta u) = 0$, queda que:

$$f'(u) = \frac{1}{u}, \text{ o bien: } D_u(\ln u) = \frac{1}{u} D_x u \qquad [4\text{-}18]$$

Ello indica que *la derivada de la función* y = *ln* u *es la recíproca de la función lineal multiplicada por la derivada de la variable*.

Para la expresión derivada de la función exponencial $y = e^u$, apliquemos logaritmo natural en ambos miembros de la función, quedando:

$$\ln y = \ln e^u = u$$

Derivando, resulta:

$$D_y(\ln y) = D(u)$$

Considerando ambos miembros como funciones compuestas:

$$\frac{1}{y} D(y) = D(u)$$

Despejando $D(y)$, queda:

$$D(y) = yD(u)$$

O bien:

$$D(e^u) = e^u D(u) \qquad [4\text{-}19]$$

La regla [4-19] establece que *la derivada de la función exponencial es la misma función exponencial, multiplicada por la derivada de la variable*.

Para encontrar las derivadas de las funciones trigonométricas inversas será suficiente con mostrar la que corresponde a la función $y = \text{arcsen } u$, exhibiendo las demás a partir de su resultado.

Siendo $y = \text{arcsen } u$, apliquemos la propiedad inversa del arco seno, es decir seno, en ambos miembros:

$$\text{sen }(y) = \text{sen }(\text{arcsen } u) \rightarrow \text{sen }(y) = u \quad (1)$$

Derivemos:

$$D(u) = D(\text{sen } y) = \cos yD(y)$$

Despejando $D(y)$, queda:

$$D(y) = \frac{D(u)}{\cos y} = \frac{D(u)}{\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 y}}$$

Y por (1)

$$D_x(\operatorname{arcsen} x) = \frac{D(u)}{\sqrt{1 - u^2}} \qquad [4\text{-}20]$$

Enunciaremos las reglas de más utilidad como sigue:

$$D_x(\arccos x) = \frac{-D_x(u)}{\sqrt{1 - u^2}} \qquad [4\text{-}21]$$

$$D_x(\operatorname{arctg} x) = \frac{D_x(u)}{1 + u^2} \qquad [4\text{-}22]$$

$$D_x(\operatorname{arccotg} x) = \frac{-D_x(u)}{1 + u^2} \qquad [4\text{-}23]$$

EJEMPLO 8

Determine la derivada de la función hiperbólica $y = \cosh x$.

SOLUCIÓN:

Hagamos: $y = \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$. Derivando resulta:

$$y' = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = \operatorname{senh} x$$

4.2.1. DERIVACIÓN IMPLÍCITA

Bajo la forma implícita se representan funciones en varias variables, como: $f(x, y) = ay^2 + by - cx^2$, en la que comúnmente $f(x, y) = 0$, expresándose la función en forma de ecuación $ay^2 + by - cx^2 = 0$. La derivación de este tipo de funciones se hace considerando la función en y como compuesta, de modo que su derivada se escribe comúnmente como y' o bien, en su defecto, x', es decir, se pierde la idea de solamente contar con una variable independiente, siéndolo ambas, en tanto que se considera la derivada de la variable x como 1 o $y = 1$ dependiendo de cual derivada se desee determinar. De ello se sigue despejar y' o x' como la derivada de la función implícita. En caso de determinar ambas derivadas, la suma de los numeradores o denominadores de ellas, es la derivada $f'(x, y)$ de la función en dos variables $f(x, y)$ (multiplicando por el signo menos la derivada x').

Combinemos el uso de las reglas de derivación vistas anteriormente, determinando las derivadas de algunas funciones implícitas.

EJEMPLO 1

Calcular la derivada y' de la función $xy^2 + (x + y) = 0$.

SOLUCIÓN:

$$2xy\,y' + y^2(1) + (1 + y') = 0$$

Factorizando y':

$$y'(2xy + 1) + y^2 + 1 = 0$$

Despejando:

$$y' = \frac{-y^2 - 1}{2xy + 1}$$

EJEMPLO 2

Calcular la derivada de la función $y - \operatorname{sen} xy = 0$.

SOLUCIÓN:

$$y' - \cos xy[xy' + y] = 0 \rightarrow y' - xy' \cos xy - y \cos xy = 0$$

Factorizando y despejando y', queda:

$$y' - xy' \cos xy - y \cos xy = 0 \rightarrow y'(1 - x \cos xy) = y \cos xy$$

Siendo la derivada:

$$y' = \frac{y \cos xy}{1 - x \cos xy}$$

EJEMPLO 3

Calcular la derivada de la ecuación del círculo $x^2 + y^2 = r^2$.

SOLUCIÓN:

Derivando queda: $2x + 2yy' = 0 \rightarrow y' = \dfrac{-x}{y}$.

EJEMPLO 4

Derivar la función ya vista: $ay^2 + by - cx^2 = 0$, calculando $f'(x, y)$.

SOLUCIÓN:

Derivando para y':

$$2ayy' + by' - 2cx(1) = 0$$

Factorizando y', queda:

$$y'(2ay + b) - 2cx = 0$$

Despejando:

$$y' = \frac{2cx}{2ay + b}$$

Derivando para x':

$$2ay(1) + b - 2cx \cdot x' = 0$$

Despejando x':

$$x' = \frac{2ay + b}{2cx}$$

Sumando los numeradores de ambas derivadas, resulta:

$$f'(x, y) = -2cx + 2ay + b$$

En la práctica es más sencillo derivar una función en varias variables, la parte algorítmica consiste en derivar la función en una de ellas, por ejemplo y', considerando a la otra, x, como una constante y viceversa. De manera que la suma $y' + x'$ resulte ser la derivada $f'(x, y)$. Para el ejemplo 4, se tiene:

$$y' = 2ay + b, \text{ así como, } x' = -2cx$$

Sumando ambas derivadas resulta:

$$f'(x, y) = -2cx + 2ay + b$$

EJEMPLO 5

Determine la derivada de la función $y = a^u$, siendo a un número real.

SOLUCIÓN:

La derivada de esta función establece una regla más de derivación. Apliquemos logaritmo natural en ambos miembros de la expresión, quedando:

$$\ln y = \ln a^u = u \ln a$$

Derivando ambos miembros: $\dfrac{y'}{y} = \ln a \cdot Du \rightarrow y' = y \ln a \cdot Du$:

$$y' = a^u \ln a \cdot Du$$

EJEMPLO 6

Determine la derivada de la función $y = (\text{sen } u)^u$.

SOLUCIÓN:

Aplicando logaritmo natural a ambos miembros, queda:

$$\ln y = \ln (\text{sen } u)^u = u \ln (\text{sen } u)$$

Derivando:

$$\frac{y'}{y} = u \frac{1}{\text{sen } u} D_u(\text{sen } u) = u \frac{\cos u}{\text{sen } u} Du$$

$$y' = y \cdot u \text{ tg } u \cdot Du$$

O sea: $y' = u \cdot (\text{sen } u)^u \cdot \text{tg } u \cdot Du$.

4.3. PRIMEROS SIGNIFICADOS DE LA DERIVADA

4.3.1. INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE LA DERIVADA

La gráfica de una función $f(x)$ incrementada en $f(x + \Delta x)$ puede ser vista como en la Figura 4.2. En esta se presentan dos puntos P y Q con los cuales simulamos el movimiento de Q hacia P, en tanto este último permanece fijo. En el proceso se pueden apreciar un sinnúmero de rectas secantes, como son: PQ', PQ'', PQ''', …, PQ^n, …, las

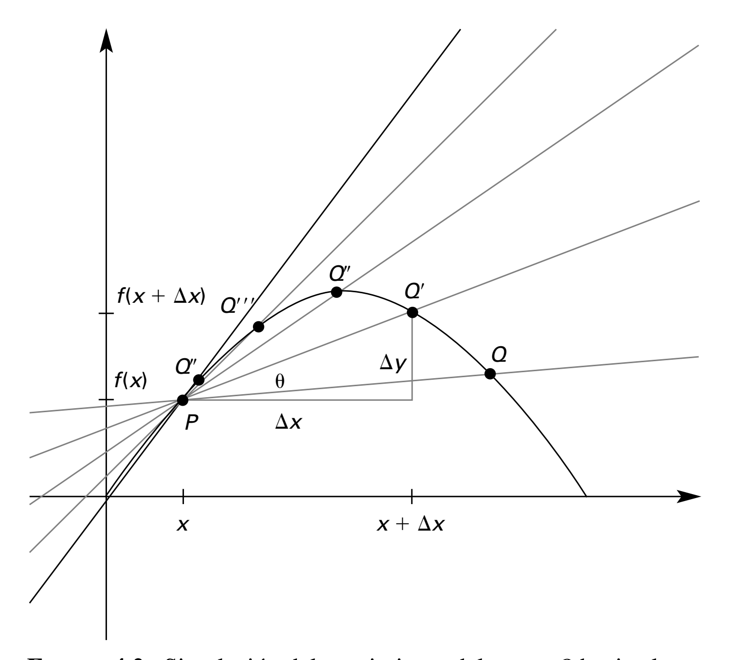


FIGURA 4.2. Simulación del movimiento del punto Q hacia el punto P.

cuales tienen por límite a la recta tangente en P, es como si la última de las rectas secantes se *saliera* del proceso de simulación al llegar Q al punto P convirtiéndose en tangente.

Cada una de las secantes tiene por pendiente m la relación

$$m = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

En el mismo proceso ocurre que $\Delta x \to 0$, de modo que el cociente

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

tiende a $f'(x)$, quien es su límite.

De esto último podemos decir que la pendiente de la recta tangente en P viene a ser la función derivada $f'(x)$.

Por su lado, la ecuación de variaciones [4- 4]:

$$f(x + \Delta x) = f(x) + f'(x)\Delta x + P(\Delta x)$$

se transforma con pocos arreglos en la ecuación de la recta tangente a la curva en el punto P, donde $x = a$, cuando $\Delta x \to 0$, quedando como:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$$

O bien:

$$f(x) - f(a) = f'(a)(x - a) \qquad [4\text{-}24]$$

En la que $f'(x)$, efectivamente, es la pendiente de la recta tangente a la curva en $x = a$. De hecho es la misma forma estándar conocida de la recta:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Para el caso de la ecuación de la recta normal en P, hacemos uso de la propiedad de la pendiente de la normal, como $m_2 = -\dfrac{1}{m_1}$, siendo m_1 la pendiente de la recta tangente y m_2 la pendiente de la normal a esta. De aquí que la ecuación de la recta normal en P, para $x = a$, resulta:

$$f(x) - f(a) = -\frac{1}{f'(a)}(x - a) \qquad [4\text{-}25]$$

Finalmente, del triangulo de la Figura 4.2 se sigue que:

$$\text{tg}\ \theta = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \qquad [4\text{-}26]$$

EJEMPLO 1

Determine la ecuación de las rectas tangente y normal a la curva cuya función es $f(x) = \sqrt{x - 1}$, en $x = 2$.

SOLUCIÓN:

Para $x = 2$ se tiene que $y = f(2) = 1$. Derivando la función, queda:

$$f'(x) = \frac{1}{2}(x - 1)^{\frac{-1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x - 1}}$$

Sustituyendo $x = 2$ en la función derivada se tiene por pendiente de la recta $m_1 = f'(2) = \dfrac{1}{2\sqrt{2 - 1}} = \dfrac{1}{2}$. De [4-24] la ecuación de la recta tangente resulta:

$$y - 1 = \frac{1}{2}(x - 2)$$

En tanto que la ecuación de la normal es:

$$y - 1 = -2(x - 2)$$

EJEMPLO 2

Calcule las pendientes de las rectas tangente y normal al círculo $x^2 + y^2 = 5$, en el punto $x = 1$.

SOLUCIÓN:

Para $x = 1$, se tiene que $y = 2$. Derivando implícitamente queda por derivada en y':

$$y' = -\frac{x}{y}$$

Sustituyendo los valores del punto P, queda la pendiente para la tangente como:

$$m_1 = y' = -\frac{1}{2}$$

En tanto que la pendiente para la normal, es $m_2 = 2$.

4.3.1.1. Trazo geométrico de la derivada a partir de la función $f(x)$

En la Figura 4.3 aparece la gráfica de la función $f(x) = -2x^2 + 5x - 3$. En esta hemos colocado algunos puntos sobre la misma, como son $\left(\frac{1}{2}, -1\right)$, $\left(\frac{5}{4}, \frac{1}{8}\right)$, $(2, -1)$. Para cada uno de ellos trazamos con línea punteada la recta tangente que le corresponde, en estos casos para los trazos se puede usar regla graduada y lápiz. Enseguida, y partiendo de cada punto, por ejemplo en $x = \frac{1}{2}$, trazamos a la derecha una distan-

cia de medida *uno* paralela al eje x. Desde donde termina esta línea subimos una vertical que interseque con la recta tangente. Luego medimos con la regla la longitud de esta última, en este caso mide 3 unidades, la cual a su vez será la ordenada en $\left(\frac{1}{2}, 3\right)$ de la gráfica de $f'(x)$, ello por la proposición [4-26].

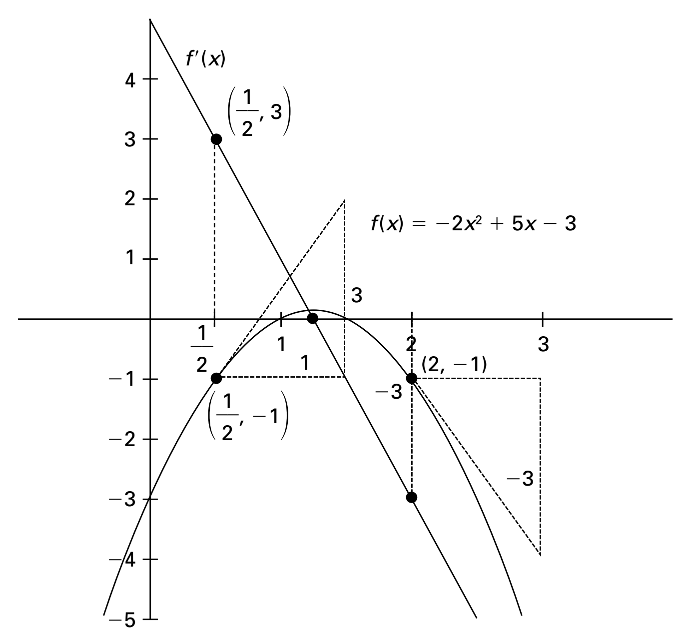


FIGURA 4.3. Determinación gráfica de la derivada de la función $f(x)$, en este caso es la línea recta.

Se continúa con el mismo procedimiento para cada punto elegido. Las coordenadas de los otros dos puntos son $\left(\frac{5}{4}, 0\right)$, $(2, -3)$. Se sigue unir a mano alzada los puntos que van resultando. Siendo, en este caso, la gráfica de la función derivada $f'(x)$ la recta que aparece en la gráfica.

Por lo general, la elección de los puntos se hace a lo largo de la curva considerando para ello las partes características o singulares, por ejemplo los lugares donde hay máximos o mínimos, puntos de torcedura, asíntotas, etc., de la curva.

4.3.2. LOS CONCEPTOS DE DIFERENCIA, DIFERENCIAL Y DERIVADA

La siguiente simulación ha sido llevado a cabo durante las clases regulares con grupos de cálculo del nivel de ingeniería. Se trata de determinar el volumen de una cáscara de toronja, para lo cual es de suponer que los estudiantes, por equipos, cuentan con una de estas; además, se requiere una regla graduada, lápiz y papel, tanto para los diseños gráficos como para los cálculos que resulten. Los pasos que se siguen son los siguientes:

1. En principio hay que cortar la toronja por la mitad, de modo que sea posible medir con la regla los radios interior y exterior. Determinar la diferencia entre radios, llamándola $\Delta r = r_{ext} - r_{int}$.
2. Hacer un gráfico del corte hecho a la toronja, a escala 1:1 cm, subrayando el área de la cáscara (véase Figura 4.4).

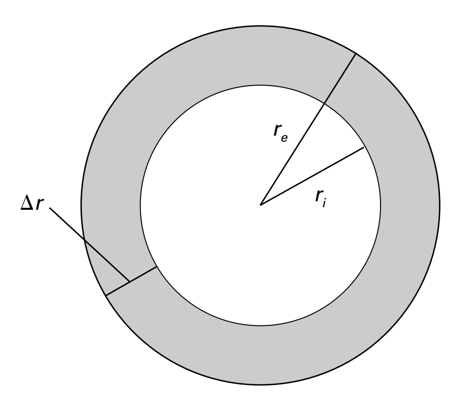


FIGURA 4.4. Sección transversal de la toronja.

3. Calcular el perímetro del círculo interior y el perímetro del círculo exterior con la expresión $p = 2\pi r$; llamarlos p_i y p_e, respectivamente.
4. *Desenvolver* los círculos y dibujar en línea recta, a escala 1: 1 cm, los perímetros p_i y p_e, y el Δr. La Figura 4.5 corresponde al desenvolvimiento de ambos círculos.

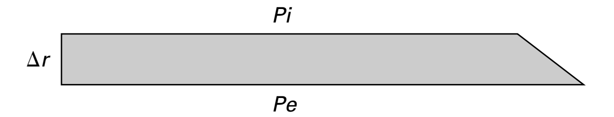


FIGURA 4.5. Desenvolvimiento de los dos círculos de la Figura 4.4.

5. Calcular el área de la figura resultante determinando por separado las áreas del rectángulo y el pequeño triángulo que se forman (es decir, el área de la cáscara de la toronja).
6. Verificar lo anterior haciendo uso de la expresión $A(r) = \pi r^2$, incrementando el radio en Δr: $A(r + \Delta r) = \pi(r + \Delta r)$ y haciendo la resta $A(r + \Delta r) - A(r)$ (habrá que sustituir los valores medidos en la toronja de r y Δr, el valor numérico en ambos casos debe ser el mismo). Esta última es llamada *diferencia*, en este caso es una diferencia de área.
7. En la expresión algebraica que resulta de la diferencia, es decir, $A(r + \Delta r) - A(r) = 2\pi r\Delta r + \pi(\Delta r)^2$, despreciar los términos que contengan $(\Delta x)^2$ en adelante. A la expresión final de esta operación hay que llamarla *diferencial* y denotarle como dA, lo cual significa *diferencial de área*. Geométricamente la parte que hemos quitado, $\pi(\Delta r)^2$, resulta ser el pequeño triángulo que aparece en la orilla de la Figura 4.6 (verifíquelo).

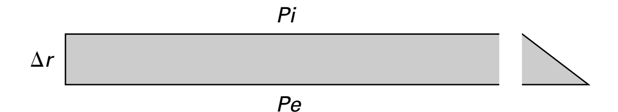


FIGURA 4.6. El área del triángulo pequeño es $\pi(\Delta r)^2$.

8. Así, el área del rectángulo que resta de la partición, viene dada por la expresión $A(r + \Delta r) - A(r) = 2\pi r\Delta r$.

De la simulación se desprenden dos definiciones importantes de los conceptos en juego. El primero de ellos es la *diferencia*:

> *La diferencia entre dos cantidades se refiere a la cantidad total que se determina con la operación* $f(x + \Delta x) - f(x) = f'(x)\Delta x + P(\Delta x)$.

[4-27]

Mientras que para el *diferencial*, en el problema, hicimos cero los coeficientes de grado dos en adelante $\pi(\Delta r)^2$, ello indica que en la ecuación anterior se aplicó $\lim_{\Delta x \to 0} P(\Delta x) = 0$, de modo que el resto, viéndole a partir de la función $f(x)$: $f(x + \Delta x) - f(x) = f'(x)\Delta x$, es lo que se conoce por diferencial. De aquí que:

> *El diferencial es un argumento de análisis entre dos cantidades. Es la cantidad aproximada que se determina con la operación* $f(x + \Delta x) - f(x) = f'(x)\Delta x$.

[4-28]

Esto último se puede escribir a partir de la proposición [4-26] como: $\Delta y = f'(x)\Delta x$, no obstante que $\lim_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$.

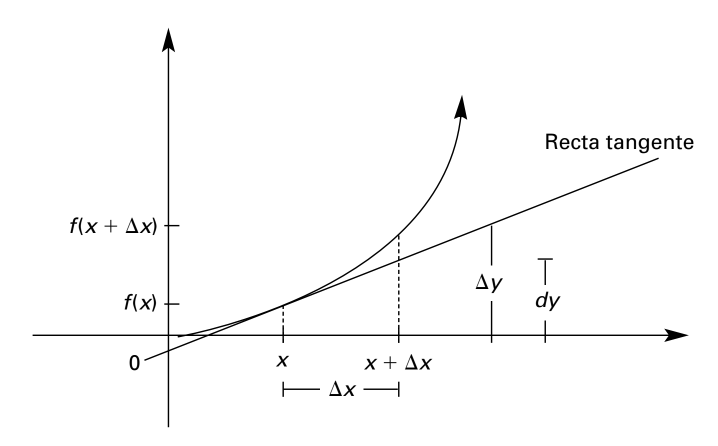


FIGURA 4.7. La figura muestra geométricamente las magnitudes de la diferencia Δy y del diferencial dy.

De aquí es costumbre cambiar la notación como el *cociente de diferenciales*:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$$

De modo que la proposición [4-28] se reconoce en dos formas (véase la Figura 4.7), como:

$$\begin{cases} dy = f'(x)\Delta x \\ dy = f'(x)dx \end{cases} \qquad [4\text{-}29]$$

La expresión $dy = f'(x)dx$, se debe ver como una *ecuación diferenciada*.

Por su lado, el volumen de la cáscara viene dado por la diferencia de volúmenes:

$$V(r + \Delta r) - V(r) = \frac{2}{3}\pi(r + \Delta r)^3 - \frac{2}{3}\pi r^3$$

$$V(r + \Delta r) - V(r) = 3\pi r^2\Delta r + 3\pi r(\Delta r)^2 + 3\pi(\Delta r)^3$$

Relación que expresa la cantidad real del volumen de la cáscara, también llamado *volumen acumulado*.

Si de la diferencia eliminamos los coeficientes asociados con incrementos superiores de grado dos, como son $3\pi r(\Delta r)^2 + 3\pi(\Delta r)^3$, nos queda el diferencial de volumen:

$$dV = 3\pi r^2\Delta r$$

Considerando que Δr se puede escribir como dr, llegamos al cociente de diferenciales:

$$\frac{dV}{dr} = 3\pi r^2$$

Esta última proporción se debe leer como: *el cambio que se produce en* V *cuando cambia* r.

La parte final del ejemplo nos da para definir la derivada en términos del cambio que se produce en las variables como:

El cociente de diferenciales $\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}} = \mathrm{f}'(\mathrm{x})$*, significa la razón de cantidad de* y*, es decir,* dy*, cuando cambia o varía* x*, como* dx.

[4-30]

A partir de usar diferenciales, la notación para las reglas de derivación asume una importancia de uso algorítmico que facilita todavía más las operaciones. Por ejemplo la regla [4-11] para la derivada de la función potencia $D_x[u(x)]^n = n[u(x)]^{n-1}D_x u(x)$, en términos de diferenciales se escribiría como:

$$d(u^n) = nu^{n-1}du$$

Cuyo significado *operativo* es el mismo que el de la regla [4-11], más teóricamente representa un diferencial de cierta cantidad u. Luego, podemos *diferenciar* funciones de modo que ello nos lleve a determinar su derivada. Por ejemplo, determinemos la derivada de la función $y = \sqrt{5x - 1}$.

Hagamos: $y = (5x - 1)^{\frac{1}{2}}$. Diferenciando queda:

$$dy = \frac{1}{2}(5x - 1)^{-\frac{1}{2}} d(5x - 1)$$

O bien la ecuación diferenciada:

$$dy = \frac{1}{2\sqrt{5x - 1}} 5dx$$

Quedando la derivada como el cociente de diferenciales: $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{5}{2\sqrt{5x - 1}}$.

EJEMPLO 1

Dada la función $f(x) = x^2$, muestre: a) la Diferencia, b) Diferencial y c) Derivada.

SOLUCIÓN:

Siendo el desarrollo binomial de la función:

$$f(x + \Delta x) = x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2$$

La diferencia queda expresada como:

$$\text{a) } f(x + \Delta x) - f(x) = 2x\Delta x + (\Delta x)^2$$

Para el diferencial, puesto que $dy = f(x + \Delta x) - f(x)$:

$$\text{b) } dy = 2x\Delta x$$

Siendo la ecuación diferenciada: $dy = 2xdx$.
En tanto que para la derivada: $\Delta x = dx$, esta queda como:

$$\text{c) } \frac{dy}{dx} = 2x$$

EJEMPLO 2

Determine el diferencial de área del semicírculo $y = \sqrt{9 - x^2}$.

SOLUCIÓN:

La Figura 4.8 muestra al semicírculo y la *toma* en el mismo de un diferencial de área. El diferencial ha sido puesto en un lado de la figura para ser analizado.

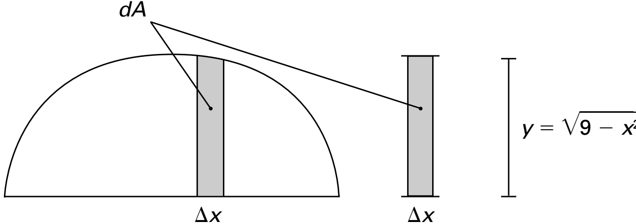


FIGURA 4.8. «Toma» de un diferencial de área, *dA*, del semicírculo $y = \sqrt{9 - x^2}$.

En este caso la base del diferencial de área es Δx, en tanto que la altura viene dada por cualquiera de las ordenadas de la forma $y = \sqrt{9 - x^2}$, de modo que la forma trapezoidal del diferencial es considerada como un rectángulo (la figura trapezoidal corresponde a la diferencia), ello permite establecer el diferencial de área del semicírculo, como:

$$dA = \sqrt{9 - x^2}\,\Delta x$$

O bien:

$$dA = \sqrt{9 - x^2}\,dx$$

El diferencial de área, así dispuesto, sirve para calcular el área bajo la curva de la función en cuestión a través de usar cálculo integral.

ACTIVIDADES Y EJERCICIOS DE LA SECCIÓN 4.2

I. Aplicando las reglas de derivación correspondientes, determine las derivadas de las siguientes funciones. Haga un uso indistinto de las reglas, es decir, puede utilizar diferenciales si se juzga conveniente.

1. $y = \dfrac{\operatorname{sen} x + \cos x}{\operatorname{sen} x - \cos x}$

2. $y = (4 - 2 \operatorname{sen} x)^3$

3. $y = \dfrac{x - 1}{x^2 - \operatorname{sen}^2 x}$

4. $y = \arccos (x^3 + 5x)$

5. $y = \dfrac{4 \cos^2 x - 2 \operatorname{sen} x}{3 \operatorname{sen}^2 x - 1}$

6. $y = \operatorname{arcsen} x - \sqrt{1 - x^2}$

7. $y = x \operatorname{sen} x + \cos x$

8. $y = \operatorname{tg}\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)$

9. $y = 5 \operatorname{sen}^3 x \cos^5 x$

10. $y = \operatorname{sen} t \operatorname{sen}\left(t - \dfrac{\pi}{2}\right)$

11. $y - \operatorname{tg} (ax + b)$

12. $y = 3(\cos^2 x + 2x^2 + 1)^3$

13. $y = x(\ln x - 1)$

14. $y = 3^{\cos x}$

15. $y = e^{(3x-2)}$

16. $y = \dfrac{1}{2} \ln \left(\dfrac{x+1}{x-1} \right)$

17. $y = \ln \left(\dfrac{\cos x}{x^2 - 2} \right)$

18. $y = \text{arcsen} \left(\dfrac{\sqrt{x} - \pi}{\sqrt{x}} \right)$

19. $y = \dfrac{a \,\text{sen}^2 x}{\sqrt{1 + \text{tg}\, x}}$

20. $y = e^{2x} \,\text{sen}\, 5x$

21. $y = (\cos x)^{\frac{1}{x}}$

22. $y = \dfrac{x}{e^{3x}}$

23. $y = \sqrt{\text{cosec}\, x} - \sqrt{\text{cosec}\, a}$

24. $y = x \;\text{arctg}\, x$

25. $y = x^5 e^{5x}$

26. $y = e^x(x^2 - 1)$

27. $y = e^x \arccos x$

28. $y = \dfrac{x^2}{\ln x}$

29. $y = \sqrt[3]{\text{sen}^2 x} + \dfrac{1}{\text{tg}^5 x}$

30. $y = \dfrac{1}{30} \sqrt{\text{sen}\, (5x^2)}$

31. $y = \dfrac{1}{30} \,\text{sen}^2\, (5x^2)$

32. $y = \text{arctg} \left(\dfrac{1+x}{1-x} \right)$

33. $y = \sqrt{x} \arccos \sqrt{x}$

34. $y = x^3 5^{3x}$

35. $y = \text{arccotg}\, (e^x)$

36. $y = \ln^3 x - \ln (\ln x)$

37. $y = \dfrac{1}{15} \cos^3 x \cdot (3 \cos^2 x - 5)$

38. $y = \sqrt{4 - x^2} + \text{arcsen}\, \dfrac{x}{2}$

39. $y = \sqrt[3]{e^{\frac{2}{3}x}}$

40. $y = \text{senh}\, (5x)$

41. $y = e^x \cosh x$

42. $y = x \,\text{tgh}\, x$

43. $y = \dfrac{\text{tgh}\, x}{x^2}$

44. $y = |x|$

45. $y = \dfrac{|x|}{x}$

46. $y = \begin{cases} 4x^2 - 3x + 1 & \text{si } x \leq 0 \\ e^x & \text{si } x > 0 \end{cases}$

En los problemas 47 al 51 tome logaritmos en ambos miembros de la función.

47. $y = (x-1)(x-2)(x-3)$

48. $y = \dfrac{(x+1)^3(2x+3)}{(5-x)(x-3)^4}$

49. $y = x \sqrt[5]{\dfrac{x^3}{x^3 + 1}}$

50. $y = \sqrt{\dfrac{(5-3x)(x^2+2)}{x-2}}$

51. $y = \dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt[3]{(x+5)^2(x-8)^{\frac{3}{2}}}}$

52. $y = (\cos x)^x$

53. $y = x^{\sqrt{x}}$

54. $y = (\sqrt{x})^x$

55. $y = (\text{arctg } x)^x$

56. $y = x^{x^x}$

II. Determine las derivadas implícitas siguientes.

57. $3x + 5y + 11 = 0$

58. $4x^2 - 9y^2 = 36$

59. $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$

60. $x^3y - xy = y^3$

61. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{5}$

62. $y^2 = \dfrac{x+y}{x-y}$

63. Encontrar y' en el punto (2, 1) si $(x + y)^3 = 27(x - y)$.

64. $\cos(x^2 + y) = y^2$

65. $y = 0{,}326\ldots - \text{sen}^2\, y$

III. Pruebe que para las siguientes funciones la derivada no existe en el punto especificado, diseñe además la gráfica de la función.

66. $y = \sqrt[3]{x}$, en $x = 0$

67. $y = 1 + (x - 1)^{\frac{4}{5}}$, en $x = 1$

68. $y = 1 \pm (x - 1)^{\frac{1}{4}}$, en $x = 1$

69. $(y - b)^n = (x - a)^m$ en $y = b$

IV. Hallar las ecuaciones de la recta tangente y normal a las siguientes curvas en los puntos que se indican.

70. $y = x^3 - 5x + 3$ en $x = 1$

71. $y = \sqrt{x-1}$ en $x = 5$

72. $y = 3x^2 - 5x + 1$ en $x = \dfrac{1}{2}$

73. $y = 2x^3 - 3x^2 + 4x - 2$ en $x = 2, 5, -1$

74. $y = e^{-x^2}$ en $x = 0$

V. Hallar los puntos de contacto de las tangentes horizontales $m = 0, f' = 0$, para las siguientes curvas.

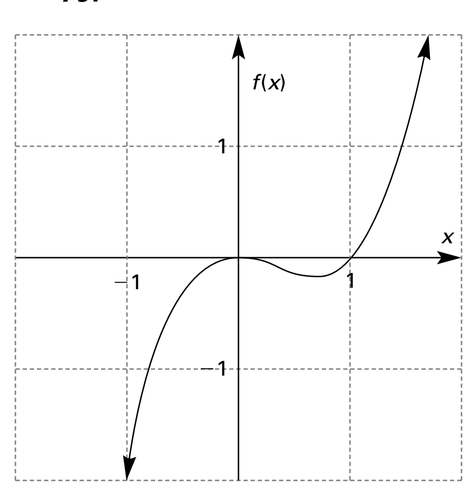
75. $y = 2x^2 - 5x$

76. $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 1$

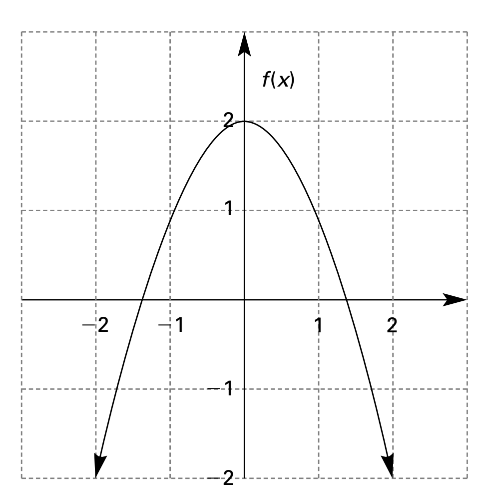
77. $y = \sqrt{1 - x^2}$

VI. A partir de las siguientes gráficas de funciones $f(x)$, determine las gráficas que corresponden a la función derivada $f'(x)$.

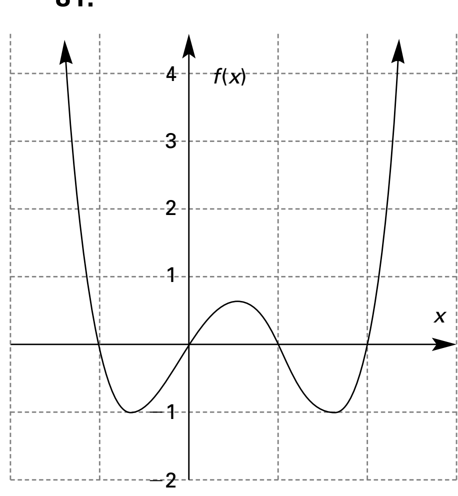
79.



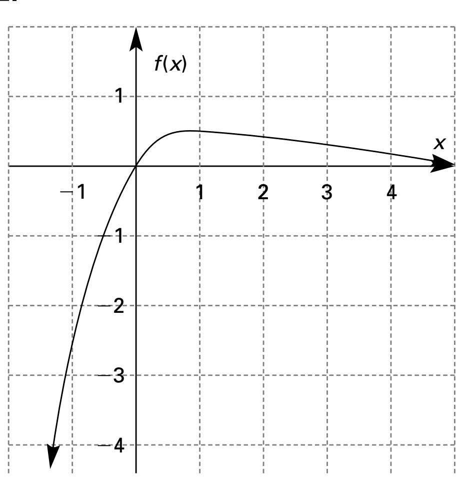
80.



81.



82.



Aplicaciones de la derivada 5



SOTERO PRIETO
(1884-1935)

Lección 61ª Martes 27 de septiembre

El Siglo XVI en Italia

Scipione del Ferro 1465 – 1526 Algebristas
Cardano (Girolamo) 1501 – 1576
Tartaglia (Nicol) 1506 – 1557
Ludovico Ferrari 1522 – 1560
Francesco Maurolico 1494 – 1575
Federigo Comandino 1509 – 1575
Matteo Ricci (Li-Ma-To) 1552 – 1610
Rafael Bombelli 1530 –

En realidad la influencia de la Imprenta en el desenvolvimiento rápido de la Ciencia, no se hizo sentir sino hasta el siglo XVI.
El descubrimiento de América y los viajes de Vasco de Gama y Magallanes ampliaron extraordinariamente el mundo conocido.

Los elementos de Euclides fueron impresos en 1482 las Cónicas de Apolonio en 1537.

Los matemáticos italianos del Renacimiento trabajaron con ardor y con grandísimo éxito en perfeccionar el Álgebra: la resolución de las ecuaciones los tanto particularmen-

Profesor de la Escuela Nacional Preparatoria y el colegio Mexiquense, en 1931, escribió diversos textos como el de Historia de las matemáticas, del cual se muestra el fragmento en manuscrito. Fue profesor de eminencias como Salvador Vallarta, Agustín Anfossi, etc.

5.1. LA DERIVADA COMO RAZÓN DE CAMBIO

En el análisis de problemas de movimiento, a cada variable x le corresponde una variación dx; esto establece un modelo variacional que se escribe como: $x \to dx$, $y \to dy$. En este modelo, los diferenciales dx, dy, etc., no son símbolos fijos, pues representan cantidades invariables que aumentan o disminuyen. En la forma de proporción, como en $\frac{dy}{dx}$, los diferenciales simbolizan una *razón de cambio*. Si el movimiento de las cantidades lo es con respecto al tiempo t, entonces la razón se escribe como $\frac{dy}{dt}$ o $\frac{dx}{dt}$, lo cual debe leerse como: *la razón de cambio de* x *con respecto a la variación de* t. En el caso de variaciones constantes como a, b, c, su razón de cambio es nula, o sea, $da = 0$, o bien $\frac{da}{dt} = 0$. En algunos casos los problemas se encuentran con una y dos variables independientes que se relacionan con la variable dependiente. Por tal razón, el modelo en que cae este tipo de problemas es llamado *razones de cambio relacionadas*. Veamos algunos ejemplos.

EJEMPLO 1

Modele y resuelva el siguiente problema usando cantidades diferenciales: un punto $P(x, y)$ se mueve en sentido contrario a las manecillas del reloj sobre la elipse $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$, de manera que sus abscisas aumentan uniformemente a razón de 0,03 cm/seg. ¿A qué razón cambian las áreas de los triángulos formados por el punto P y los focos de la elipse cuando $x = 0, 1, 4, -1$?

SOLUCIÓN:

Para la solución véase la simulación del movimiento del punto P sobre la elipse en la Figura 5.1. En este caso las distancias del origen a los focos se determinan con los valores de los semiejes $a = 4$ y $b = 3$, a partir de la relación $c^2 = a^2 - b^2 = 16 - 9$, siendo $c = \sqrt{7}$.

De manera que las coordenadas de los focos se encuentran en $F_1(-\sqrt{7}, 0)$ y $F_2(\sqrt{7}, 0)$, y la distancia fija entre focos, que viene siendo la base de cada triángulo que subtiende el movimiento del punto, es de $2\sqrt{7}$.

De aquí que las áreas para cada triángulo vienen dadas por la relación $A = \frac{2\sqrt{7}y}{2}$ en tanto que y es variable a la que le corresponde un diferencial $y \to dy$, para $x \to dx$. Siendo $y = \frac{3}{4}\sqrt{16 - x^2}$. Luego el área de cada triángulo formado por los puntos F_1PF_2 viene dado por:

$$A = \frac{2\sqrt{7}\frac{3}{4}\sqrt{16 - x^2}}{2} = \frac{3}{4}\sqrt{7}\sqrt{16 - x^2}$$

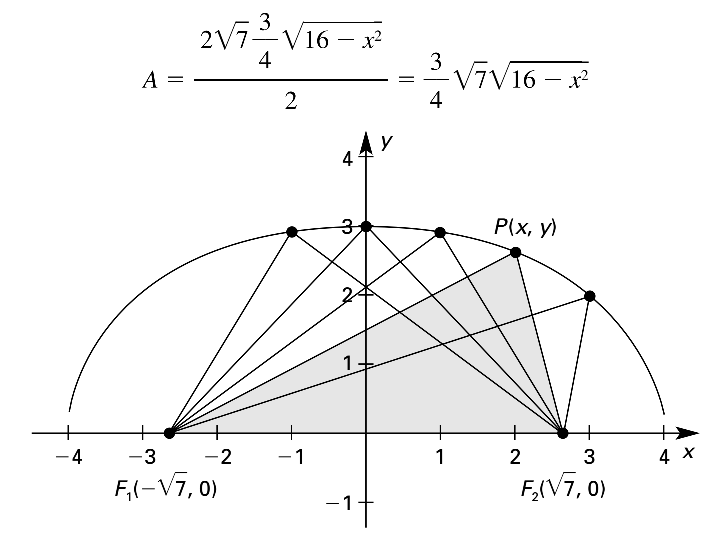


FIGURA 5.1. Simulación del movimiento del punto P sobre la elipse $y = \frac{3}{4}\sqrt{16 - x^2}$. La parte sombreada representa una variación del área en estado de constancia.

Diferenciando esta última expresión implícitamente, nos queda:

$$\frac{dA}{dt} = -\frac{3\sqrt{7}x}{4\sqrt{16 - x^2}}\frac{dx}{dt}$$

Puesto que $\frac{dx}{dt} = 0{,}03$ cm/seg, para:

a) $x = 0, \frac{dA}{dt} = 0.$

b) $x = 1, \frac{dA}{dt} = -0{,}03 \text{ cm}^2/\text{seg}$

c) $x = 4, \frac{dA}{dt}$ no existe ¿por qué?

d) $x = -1, \frac{dA}{dt} = 0{,}015 \text{ cm}^2/\text{seg}$

EJEMPLO 2

Desde su observatorio, un físico captó con un telescopio-telemétrico un objeto volador no identificado, OVNI, cuando este subía sobre la horizontal a velocidad constante. Cuando el objeto alcanzó un ángulo vertical de $\frac{5\pi}{12}$ rad, la variación angular del telescopio era de 0,034 rad/seg y la distancia observador-objeto de 3 km. Con estos datos, determine la razón de cambio o variación de la distancia vertical para el momento de la observación.

SOLUCIÓN:

La Figura 5.2 muestra la simulación del problema así como las cantidades variables y constantes involucradas, es decir y, θ y 5 km. Por su lado, en la Figura 5.3 hemos *sacado* de la simulación la parte que deseamos analizar, en este caso un triángulo rectángulo, colocando a cada variable el diferencial que le corresponde, es decir: $y \to dy$, $\theta \to d\theta$.

Siendo $\theta = \frac{5\pi}{12}$ rad, $\frac{d\theta}{dt} = 0{,}034$ rad/seg, buscándose la variación de y, o sea $\frac{dy}{dt}$.

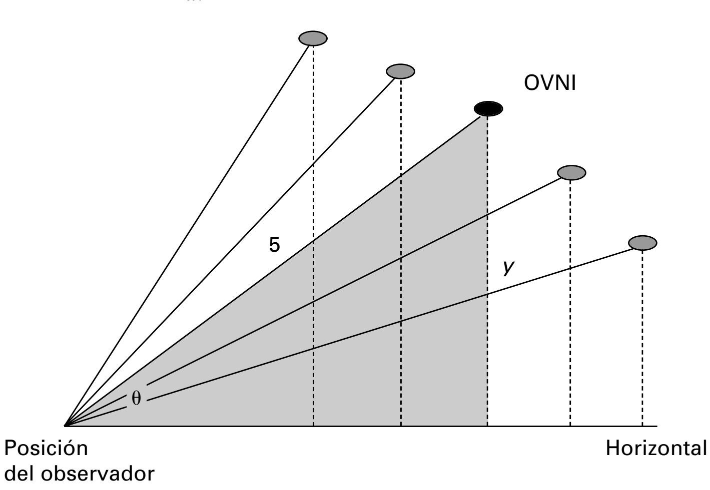


FIGURA 5.2. Variabilidad y estados de constancia en el movimiento del OVNI.

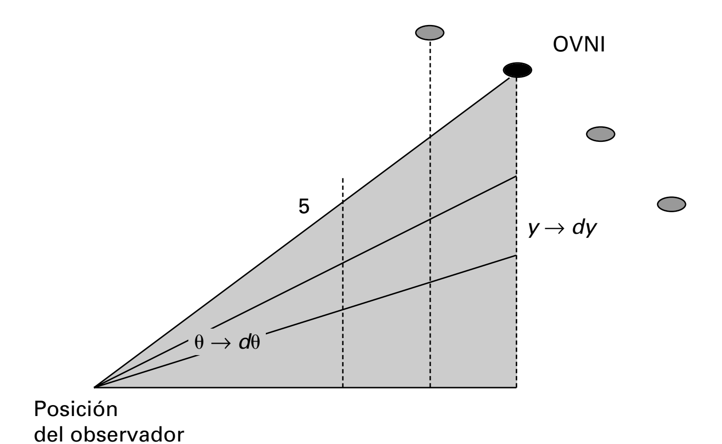


FIGURA 5.3. Análisis de una de las instantáneas de la simulación.

La relación trigonométrica que se sigue para resolver el problema es:

$$\text{sen } \theta = \frac{y}{3} = \frac{1}{3}y$$

Diferenciando esta última, se tiene:

$$\cos \theta \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{3}\frac{dy}{dt}$$

Despejando $\frac{dy}{dt}$:

$$\frac{dy}{dt} = 3 \cos \theta \frac{d\theta}{dt}$$

Sustituyendo valores conocidos, se tiene:

$$\frac{dy}{dt} = 3 \cos \frac{5\pi}{12} [0{,}034]$$

De aquí que, para el momento de la observación, la variación vertical del OVNI, era de: $\frac{dy}{dt} = 0{,}026$ km/seg.

EJEMPLO 3

Un cultivo de bacterias crece exponencialmente de manera que la cantidad de éstas con respecto al tiempo viene dada por la función $N(t) = 500.000 \cdot e^{0{,}405t}$. a) Encuentre la razón de cambio con la que las bacterias crecen al cabo de una hora. b) ¿Qué cantidad de bacterias se acumularán al cabo de ese lapso de tiempo?

SOLUCIÓN:

a) La razón de cambio viene dada por la derivada de la función, es decir:

$$\frac{dN}{dt} = 500.000 \cdot e^{0,405t}d(0,405t)$$

$$\frac{dN}{dt} = (0,405)500.000 \cdot e^{0,405t}$$

O bien:

$$\frac{dN}{dt} = 202.500e^{0,405t}$$

De aquí que en una hora, la razón de cambio es de:

$$\frac{dN}{dt} = 202.500e^{0,405(t)} = 303.596 \text{ bacterias/hora}$$

b) Una hora después la cantidad de bacterias será de:

c) $N(3.600) = 500.000e^{0,405(1)} = 749.620$

EJEMPLO 4

Dos lados paralelos de un rectángulo se alargan a razón de 3 cm/seg mientras los otros dos se acortan de modo que la figura permanece con área constante igual a 100 cm^2 (véase la Figura 5.4).

a) ¿Con qué velocidad esta cambiando el perímetro P cuando la longitud del lado que aumenta es de 3,5 cm?
b) ¿Cuáles son las dimensiones del rectángulo cuando el perímetro deja de crecer?

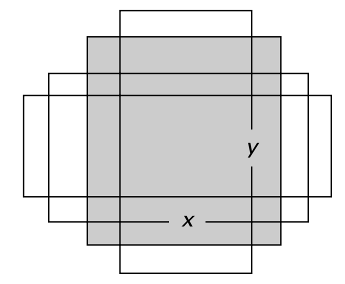


FIGURA 5.4. Simulación del movimiento de los rectángulos.

SOLUCIÓN:

a) Siendo el perímetro: $P = 2x + 2y$ (1), este es condicionado al área: $xy = 100$ (2). Despejando y de (2) y sustituyendo en (1) nos queda:

$$P(x) = 2x + \frac{200}{x} = 2x + 200x^{-1}$$

Diferenciando esta última, resulta:

$$\frac{dP}{dt} = \left(2 - \frac{200}{x^2}\right)\frac{dx}{dt}$$

Sustituyendo en esta el valor de $x = 3,5$, con $\frac{dx}{dt} = 3$ cm/seg, obtenemos por variación del parímetro respecto al tiempo t:

$$\frac{dP}{dt} = \left(2 - \frac{200}{(3,5)^2}\right)(3) = -42,97 \text{ cm/seg}$$

b) Las dimensiones del rectángulo cuando el perímetro deja de crecer se determinan para una variación nula del perímetro, es decir, cuando su razón de cambio es cero. Esto se cumple cuando:

$$\frac{dP}{dt} = \left(2 - \frac{200}{x^2}\right)\frac{dx}{dt} = 0$$

O bien:

$$2 - \frac{200}{x^2} = 0 \rightarrow 2x^2 = 200$$

De aquí resulta que el perímetro no crece cuando $x = 10$ e $y = 10$.

EJEMPLO 5

Un vehículo transita por una curva circular de radio $r = 200$ m, con velocidad uniforme de 80 km\hora (véase la figura 5.5).

a) ¿Cuál es la razón de cambio del ángulo central θ de la curva para la velocidad del vehículo?
b) ¿Cuál es la distancia recorrida por el vehículo sobre la curva, desde que entro a ésta, cuando θ es de 50°?
c) ¿A qué velocidad cambia el área del segmento circular con los datos anteriores?

SOLUCIÓN:

a) La longitud de arco de cualquier curva circular viene dado por la relación:

$$LC = r\theta \quad (1)$$

Diferenciando esta última considerando que r permanece constante, queda:

$$\frac{dL}{dt} = r\frac{d\theta}{dt}$$

Despejado $\frac{d\theta}{dt}$, resulta:

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\frac{dL}{dt}}{r}$$

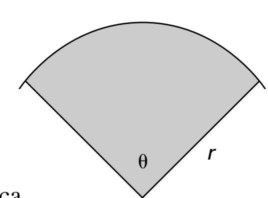


FIGURA 5.5. Gráfica del segmento de área circular.

Puesto que la velocidad del vehículo viene dada por $\frac{dL}{dt} = 150$ kph, con $r = 200$ m, resulta, que la razón de cambio del ángulo θ respecto al tiempo, es:

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{80}{0{,}200} = 400 \text{ kph}$$

b) Sustituyendo en (1) $r = 200$ y $\theta = 50 = 0{,}873$ rad:

$LC = 200(0{,}873) = 174{,}6$ m (Distancia recorrida por el vehículo)

c) El área del segmento circular viene dado por $A = \frac{1}{2}r^2\theta$. Considerando que el radio es constante, resulta al diferenciar:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}r^2\frac{d\theta}{dt}$$

Sustituyendo valores, se obtiene la variación del área del segmento circular con respecto al tiempo, es decir:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}(0{,}200)^2(400) = 80 \text{ km}^2/\text{h}$$

EJEMPLO 6

Una nave sube verticalmente al espacio a una velocidad uniforme de 300 km/h. En tierra, un observador que se encuentra a 1 km del lugar del lanzamiento sigue la ruta de la nave con un telescopio; supongamos que el telescopio y el lugar del lanzamiento se encuentran sobre una misma línea horizontal (véase la Figura 5.6):

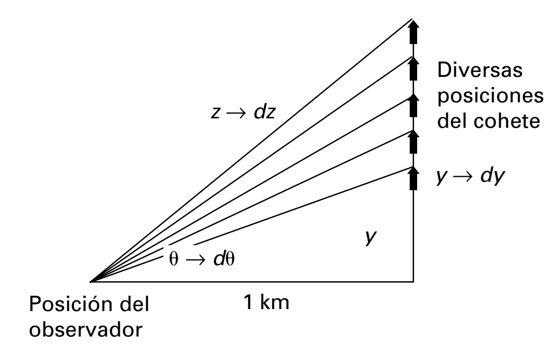


FIGURA 5.6. Simulación de las diversas posiciones del cohete.

a) ¿A qué velocidad esta cambiando la distancia entre el observador y la nave cuando esta última ha subido 5 km?
b) ¿A qué velocidad esta cambiando el ángulo de inclinación del telescopio cuando este es de $\theta = \frac{\pi}{3}$ rad/seg?

SOLUCIÓN:

a) Puesto que las variables involucradas se asumen al modelo:

$$\theta \to d\theta,\ z \to dz,\ y \to dy$$

Podemos establecer la distancia observador-nave como:

$$z = \sqrt{y^2 + 1} \quad (1)$$

Diferenciando esta última con respecto al tiempo:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{y}{\sqrt{y^2 + 1}} \frac{dy}{dt}$$

Dado que $y = 5$, para $\frac{dy}{dt} = 300$ km/h, sustituyendo en la relación anterior, resulta:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{5}{\sqrt{(5)^2 + 1}}(300) = 294{,}72 \text{ km/h}$$

b) La variación del ángulo θ está sujeta a la relación tg $\theta = \frac{y}{1}$, diferenciando queda:

$$\sec^2\theta \frac{d\theta}{dt} = \frac{dy}{dt}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \cos^2\theta \frac{dy}{dt}$$

Sustituyendo los valores correspondientes, resulta:

$$\frac{d\theta}{dt} = \left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)^2 [300] = 75 \text{ rad/seg}$$

EJEMPLO 7

Un barco *B* se halla a 75 km al Este de otro barco *A*. Si *B* navega hacia el Oeste a una velocidad de 12 km/h y *A* hacia el Sur a una velocidad de 9 km/h. ¿A qué velocidad se estarán alejando o acercando al cabo de 2 horas?

SOLUCIÓN:

Las variables involucradas en el problema son $z \to dz$, $y \to dy$, $x \to dx$ (véase la Figura 5.7). De aquí que la relación que involucra las velocidades de ambos barcos viene dada por:

$$z = \sqrt{(75 - x)^2 + y^2} \quad (1)$$

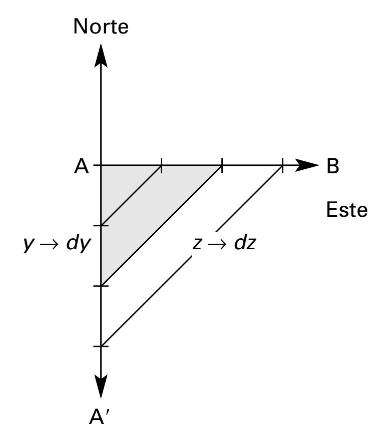


FIGURA 5.7. El sombreado indica la posición de los barcos dos horas después.

Diferenciando (1) implícitamente, resulta:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{-(75 - x)\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt}}{\sqrt{(75 - x)^2 + y^2}} \quad (2)$$

Dos horas después la posición de B, impuesta por x, es de 24 km, con $\frac{dx}{dt} = 12$, en tanto que la posición de A dada por y es de 18 km con $\frac{dy}{dt} = 9$. Sustituyendo estos valores en (2) queda por solución:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{-(75 - 24)(12) + 2(18)(9)}{\sqrt{(75 - 24)^2 + (18)^2}} = -8{,}3 \text{ km/h}$$

5.2. POSICIÓN, VELOCIDAD Y ACELERACIÓN. TIRO PARABÓLICO

Incluyamos una segunda variación a la proposición [4-4] vista anteriormente, es decir a:

$$f(x + \Delta x) = f(x) + f'(x)\Delta x + B(\Delta x)^2 + C(\Delta x)^2 + \ldots$$

Escribamos el coeficiente B en términos de la segunda derivada $f''(x)$ como: $B = \frac{f''(x)}{2}$, quedando la regla como:

$$f(x + \Delta x) = f(x) + f'(x)\Delta x + \frac{f''(x)}{2}(\Delta x)^2 + R(\Delta x) \quad (1)$$

De hecho, veremos en el siguiente capítulo, proposición [6-18], el significado de los coeficientes B, C, D, etc., de ésta expresión. De momento convengamos en aceptar válido el aserto.

Hagamos enseguida, $R(\Delta x) = 0$, dejando solamente el argumento:

$$f(x + \Delta x) = f(x) + f'(x)\Delta x + \frac{f''(x)}{2}(\Delta x)^2 \quad (2)$$

Puesto que en la sección 5-1 llamamos a la primera derivada *razón de cambio*, incluso la vimos como la velocidad con que un punto P recorre el espacio de una curva $f(x)$, usaremos las nociones de *espacio*, *velocidad* y *aceleración* para hacer los siguientes cambios de notación a la expresión (2), es decir: $t = \Delta t$, $x = 0$, $s(x) = f(x)$, $s'(x) = f'(x)$, $s''(x) = f''(x)$, quedando:

$$s(t) = s(0) + s'(0)t + s''(0)\frac{t^2}{2} \quad (3)$$

La expresión (3) es conocida como *fórmula de tiro parabólico* o lanzamiento vertical. Donde:

$s(t)$: Es el espacio que recorre un objeto al ser lanzado verticalmente hacia arriba.

$s(0) = s_0$: Es la altura inicial desde la que es lanzado el objeto.

$s'(0) = v_0$: Es la velocidad inicial impresa al objeto para ser lanzado.

$\frac{s''(0)}{2} = \frac{a}{2} = \frac{9,8}{2}$: Mejor conocida como aceleración para un tiempo t del objeto.

Así se llega a la expresión:

$$s(t) = -\frac{9,8}{2}t^2 + v_0 t + s_0 \qquad [5\text{-}1]$$

La fórmula [5-1] fue determinada a partir de un sinnúmero de simplificaciones que se dieron a lo largo del tiempo. Sin embargo, hemos mostrado que esta se encuentra implícita en la ecuación de variaciones [4-4], la cual en el libro nos ha servido como argumento central para su estructuración. Veamos la regla [5-1] con un caso particular.

EJEMPLO 1

Una piedra es lanzada verticalmente hacia arriba desde un edificio de 32 metros de altura, con una velocidad inicial de 26 m/seg.

a) Escriba las fórmulas para la velocidad y aceleración. Determine la magnitud de la velocidad para $t = 4$.
b) ¿Para qué valores de t son válidas las fórmulas en a) (en otras palabras, ¿cuándo la piedra impacta en el suelo?).
c) ¿En qué tiempo t alcanza la piedra la máxima altura?
d) ¿Cuál es la máxima altura que alcanza la piedra?

SOLUCIÓN:

Siendo la ecuación del espacio que recorre la piedra:

$$s(t) = 4,9t^2 + 26t + 32$$

a) La velocidad queda expresada como: $s'(t) = v(t) = -9,8t + 26$ en m/seg. En tanto que la aceleración: $s''(t) = a(t) = -9,8$ m/seg^2.
b) La piedra impactará en el suelo cuando toque al eje t hipotético (véase la gráfica de la Figura 5.8), es decir cuando $s(t) = 0$. Teniéndose:

$$t = \frac{-26 \pm \sqrt{676 + 627,2}}{-9,8}, \quad t_1 = -1,03, \quad t_2 = 6,33$$

La piedra llega al suelo a los 6,33 segundos. De aquí que las fórmulas del inciso a) solamente son válidas para el intervalo de tiempo $0 \leq t \leq 6,33$.
c) La altura máxima es alcanzada por la piedra cuando la velocidad se anula, es decir $s'(t) = 0$, o bien: $-9,8t + 66 = 0$. Luego el tiempo en el que la piedra alcanza la máxima altura es:

$$t = \frac{26}{9,8} = 2,65s$$

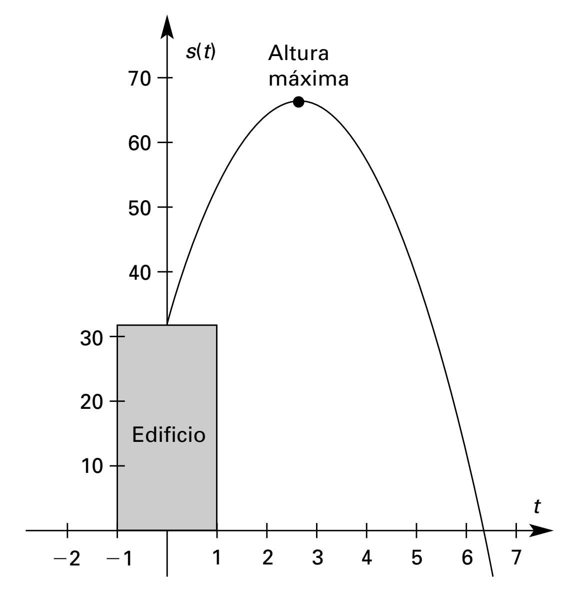


FIGURA 5.8. Simulación del lanzamiento de la piedra.

d) Siendo la máxima altura alcanzada:

$$s(2{,}65) = -4{,}5(2{,}65)^2 + 26(2{,}65) + 32$$

O bien: $s_{\text{máx}} = 66{,}49$ m.

ACTIVIDADES Y EJERCICIOS DE LAS SECCIONES 5.1 Y 5.2

I. Problemas de razón de cambio

1. Una bola de nieve se derrite a razón de 0,0025 cm^3/h. Suponga que la bola siempre conserva la esfericidad. ¿Cuál es la razón de cambio del radio r cuando la bola tiene 30 cm de diámetro?

2. El área de la superficie de un cubo cambia a razón de 40 cm^2/seg. ¿Con qué velocidad cambia el volumen cuando el área es de 300 cm^2?

3. Una placa circular se calienta de manera que se dilata aumentando su radio a razón de 0,0005 cm/h. ¿A qué razón está aumentando el área de la placa cuando el radio mide 15,375 cm?

4. Un punto P se mueve sobre el círculo $x^2 + y^2 = r^2$, de manera que su abscisa aumenta uniformemente k unidades por segundo. Si la proyección de P sobre el eje x es M. ¿A qué razón aumenta el área del triángulo OMP cuando x está en el punto de abscisa $x = a$?

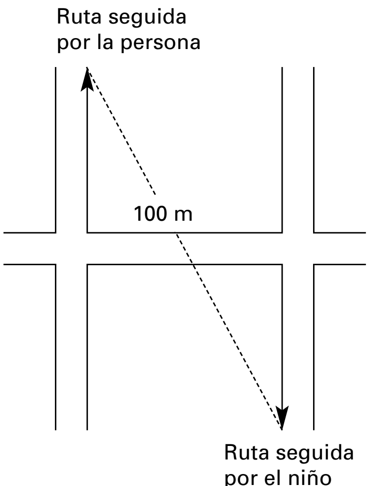
5. Uno de los extremos de una escalera de 20 metros, se apoya sobre un muro vertical levantado sobre un piso horizontal. Suponga que se empuja el pie de la escalera alejándola del muro a razón de 0,9 m/min.

a) ¿Con qué velocidad baja la extremidad superior de la escalera cuando su pie dista 5,6 metros del muro?
b) ¿En qué tiempo se moverán a la misma velocidad los dos extremos de la escalera?
c) ¿En qué tiempo bajará la extremidad superior de la escalera a razón de 1,3 m/seg.

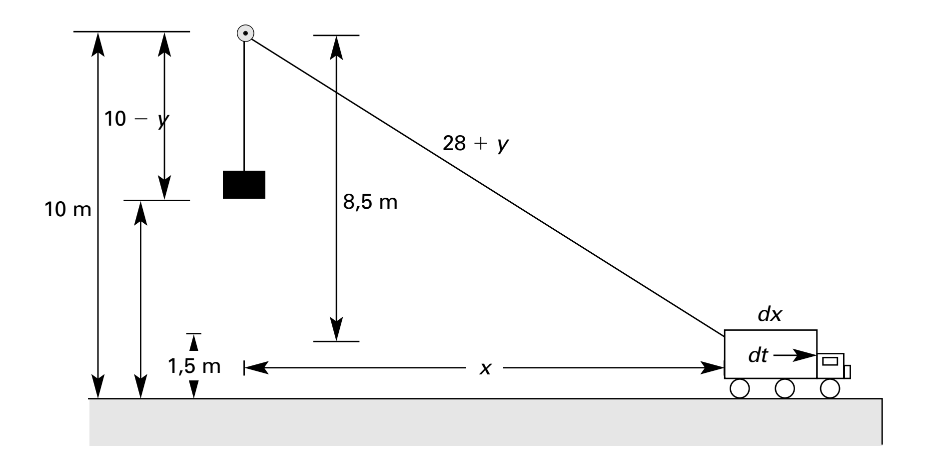
6. Un punto P se mueve sobre la parábola $(y - 1)^2 = 4(x + 3)$ de manera que sus ordenadas aumentan uniformemente 1,5 cm/seg. ¿En qué momento aumentan las abscisas y ordenadas a la misma razón?

7. Del ejemplo 1 de la sección 5.1. ¿Con qué velocidad está cambiando la suma de los lados del triángulo F_1PF_2 cuando $x = 0$ e $y = 3$; es decir, encuentre la proporción en que se mueven, para $F_1P + F_2P$?

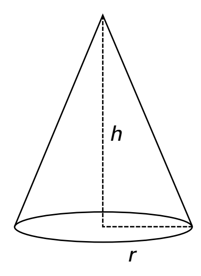
8. Una persona se aleja de un crucero a 6 km/h. Sobre la misma avenida, y cuando han transcurrido 10 minutos, a 100 metros del crucero, un niño se aleja en su bicicleta en sentido opuesto a razón de 18 km/h. Véase figura. ¿Cómo cambia la distancia entre ambos 20 minutos después que el primero comenzó a caminar? Suponga que los cruceros se encuentran a 90° en cada esquina.



9. Con los mismos datos del problema anterior, resuélvalo suponiendo que el ángulo entre los cruceros esta en diagonal a 120°.



10. Un contenedor de madera contiene cerámica y cuelga de una polea a 10 metros del suelo; la polea permite deslizarle verticalmente, tal como se muestra en la figura de abajo de la página anterior. El otro extremo es jalado por un vehículo que tiene una altura de 1,5 metros, y la cuerda que sirve para jalarlo 28 metros desde el extremo del contenedor hasta el vehículo. Si el vehículo se aleja a una velocidad de 0,3 m/seg. ¿A qué velocidad está subiendo el contenedor cuando se encuentra a una altura de 4,5 metros del suelo? ¿Qué velocidad lleva el vehículo cuando se ha alejado 3,5 metros y el contenedor sube a una velocidad de 0,4 m/seg?

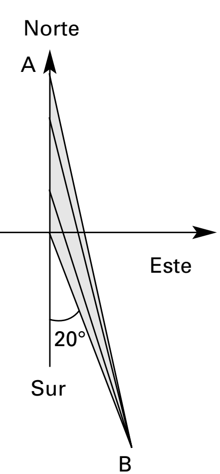


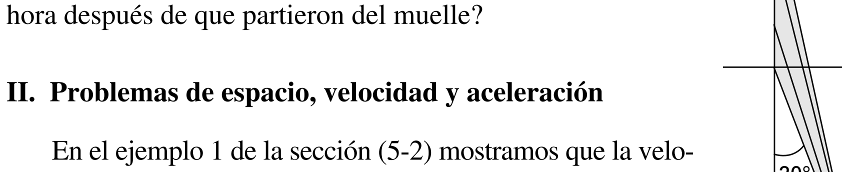
11. Un montón de arena se vacía en el suelo de manera que forma un cono cuyo radio aumenta 5 cm/min en tanto que la altura disminuye 3 cm/min. Calcular cómo varía el volumen total del cono de arena cuando el radio r mide un metro y la altura h 2 metros. Véase figura.

12. Suponga que un vehículo transita sobre una curva circular cuyo radio es de 150 metros, a una velocidad constante de 70 km/h. ¿Cómo está cambiando el ángulo central θ de la curva?

13. Dos barcos A y B parten al mismo tiempo del muelle O, el barco A lo hace en dirección al norte franco con una velocidad de 20 km/h, en tanto que B toma una dirección SE 20° a una velocidad de 30 km/h.

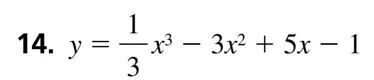
¿Cómo está cambiando la distancia entre los barcos una hora después de que partieron del muelle?





II. Problemas de espacio, velocidad y aceleración

En el ejemplo 1 de la sección (5-2) mostramos que la velocidad de la piedra es cero cuando su derivada es cero, a partir de esta proposición, encuentre los valores de x para los cuales la velocidad $y' = f'(x)$ de las siguientes funciones es cero.



14. $y = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 5x - 1$

15. $y = x^5 - 5ax^4 + 5a^2x^3 + a^5$

16. $y = x(a - x)^2$

17. $y = x\sqrt{ax - x^2}$

18. $y = x(a + x)(a - x)^2$

19. $y = \dfrac{1 - x + x^2}{1 + x - x^2}$

20. $y = \dfrac{x^2 - 7x + 6}{x - 10}$

21. $y = \text{sen}\, x$

Una partícula se mueve a lo largo de una línea recta con una posición para cada instante, de tiempo t, dado por la función $s(t)$. Para cada una de las siguientes funciones obtenga las funciones velocidad $s'(t)$, aceleración $s''(t)$ y magnitud de la velocidad $|s'(t)|$. Calcule los valores de estas funciones para $t = 1$ y $t = 3$ segundos.

22. $s(t) = 5t^2 + 6t - 4$

23. $s(t) = -6t^2 + 20t + 1$

24. $s(t) = 7t^3 + 10t + 3$

25. $s(t) = 0{,}4t^3 - 4t^2 - t + 1$

26. $s(t) = \sqrt{t + 1}$

27. $s(t) = t + \dfrac{1}{t}$

28. $s(t) = t^3 - 3t^2 + 3t - 1$

29. $s(t) = 0{,}3t^2 + 2t - 1$

30. Se lanza una pelota verticalmente hacia arriba desde un edificio de 15 metros, con una velocidad inicial de 16 m/seg. Determine la máxima altura que alcanza la pelota, el tiempo que dura en el aire y la velocidad con que golpea el suelo.

31. Se lanza una piedra desde un edificio de 8 metros con una velocidad de 8 m/seg. ¿Cuánto tiempo tardará la pelota para llegar a su máxima altura? ¿A qué velocidad pasa la piedra, cuando baja, a la altura del edificio? ¿Cuándo y con qué velocidad impacta en el suelo?

32. Desde un puente de 30 metros de altura por encima del agua, una persona lanza una piedra con una velocidad de 10 m/seg. ¿Con qué velocidad golpea la piedra en el agua? ¿Qué tan retirada está la piedra del agua cuando alcanza una velocidad de 15 m/seg?

33. Se lanza un objeto hacia arriba, desde el suelo, con una velocidad de 35 m/seg. Muestre que la aceleración de la piedra es constante. ¿En cuántos segundos la piedra alcanza su máxima altura? ¿Cuántos segundos tarda en llegar al suelo? ¿Con qué velocidad impacta en el suelo?

34. Las ecuaciones de las trayectorias que siguen dos cuerpos vienen dadas por $s(t) = 3t^2 - 5t + 1$ y $s(t) = t^2 - 2t$. ¿En qué tiempo ambos cuerpos tendrán la misma velocidad?

5.3. LA REGLA DE L'HÔPITAL

Sobre todo, en el cálculo de límites de funciones racionales se presentan los casos de indeterminaciones de la forma $\dfrac{0}{0}, \dfrac{a}{0}, \dfrac{\infty}{\infty}$, etc. Cuando ello ocurre es pertinente preguntarse si el límite buscado existe para las funciones involucradas, toda vez que se agoten las posibilidades de cálculo: racionalizar el denominador, multiplicar por el conjugado, etc. En estos casos resulta útil la regla de L'Hôpital.

Consideremos enseguida una función racional de la forma $\dfrac{f(x)}{g(x)}$, en la que para un valor particular $x = a$ se tenga $f(a) = 0$ y $g(a) = 0$, valores con los cuales evidentemente se indetermina la forma racional cuando $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{0}{0}$. Supongamos que las funciones f y g son desarrolladas a partir de la última forma de la ecuación de variaciones [4-4] vista en la sección 5, es decir:

$$f(x + \Delta x) = f(x) + f'(x)\Delta x + \frac{f''(x)}{2}(\Delta x)^2 + R(\Delta x)$$

Si de esta tomamos solamente hasta la aproximación lineal, como:

$$\frac{f(a + \Delta x) = f(a) + f'(a)\Delta x}{g(x + \Delta x) = g(a) + g'(a)\Delta x} = \frac{\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x} = f'(a)}{\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{g(x + \Delta x) = g(a)}{\Delta x} = g'(a)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}$$

DES INFINIMENT PETITS. I. Part. 145

SECTION IX.

Solution de quelques Problêmes qui dépendent des Méthodes précédentes.

PROPOSITION I.

Problême.

163. SOIT *une ligne courbe* AMD (AP = x, PM = y, AB = a) *telle que la valeur de l'appliquée* y *ſoit exprimée par une fraction, dont le numérateur & le dénominateur deviennent chacun zero lorſque* x = a, *c'eſt-à-dire lorſque le point* P *tombe ſur le point donné* B. *On demande quelle doit être alors la valeur de l'appliquée* BD. FIG. 130.

FIGURA 5.9. Fragmento de la obra de cálculo de L'Hôpital, llamada *Analyse des infiniment petits*, escrita en 1696, en la cual aparece la regla que lleva su nombre.

Esto último significa que si el cociente de funciones $\dfrac{f(a)}{g(a)}$ se indetermina para $x = a$, y el valor del límite se puede determinar haciendo uso del cociente de las derivadas de ambas funciones, de aquí se sigue que:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Resultado que puede tomar un valor determinado o bien las funciones pueden ser simultáneamente de la forma $\frac{0}{0}$, lo cual nos conduciría a establecer el límite a partir de las derivadas segundas, terceras, etc., como:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f''(x)}{g''(x)} = \ldots = \lim_{x \to a} \frac{f^n(x)}{g^n(x)} = \ldots \qquad [5\text{-}2]$$

La regla [5-2] es llamada de L´Hôpital, véase el fragmento de página de la obra de este autor llamada *Analyse des infiniment petits* escrita en 1696, en la cual es colocada dicha proposición. La regla es válida incluso para la forma indeterminada $\frac{\infty}{\infty}$.

EJEMPLO 1

Calcule la siguiente forma indeterminada: $\lim_{x \to 0} \frac{e^x}{x}$.

SOLUCIÓN:

Aplicando directamente el límite la expresión deviene $\frac{1}{0}$. Derivando las funciones del numerador y denominador y aplicando a las derivadas de nuevo el límite resulta:

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x}{1} = e^0 = 1$$

Siendo 1 el verdadero valor del límite.

La mayoría de los límites especiales, como el del ejemplo 1, resueltos en la sección 3.7.4, se resuelven fácilmente mediante la regla de L'Hôpital.

EJEMPLO 2

Calcule la forma indeterminada $\lim_{x \to \infty} \frac{\ln x}{x}$.

SOLUCIÓN:

El límite es de la forma $\frac{\infty}{\infty}$. Derivando ambas expresiones, queda:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$$

Cuyo resultado es determinado, puesto que es cero.

El ejemplo 3 ha sido tomado de la citada obra de L'Hôpital, página 146.

EJEMPLO 3

Determinar el límite $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\sqrt{2a^3x - x^4} - a\sqrt[3]{a^2x}}{a - \sqrt[4]{ax^3}}$.

SOLUCIÓN:

Al aplicar a la expresión el valor de $x = a$, la fracción deviene a la forma $\dfrac{0}{0}$. Derivando cada una de las funciones y aplicando a estas el límite, resulta:

$$\lim_{x \to a} \frac{\dfrac{a^3 - 2x^3}{\sqrt{2a^3x - x^4}} - \dfrac{a^2}{3\sqrt[3]{ax^2}}}{-\dfrac{3a}{4\sqrt[4]{a^3x}}}$$

Aplicando el límite en cada expresión, el resultado nos queda como:

$$\frac{\dfrac{-4}{3}a}{\dfrac{-3}{4}} = \frac{16}{9}a$$

La regla [5-2] de L'Hôpital se aplica solamente a funciones que son continuas y cuyas derivadas son determinadas. Por ejemplo, el verdadero valor del límite $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x - \operatorname{sen} x}{x + \cos x}$ es 1, en tanto que el límite de sus derivadas $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1 - \cos x}{1 + \operatorname{sen} x}$, es una forma indeterminada.

5.4. MÁXIMOS Y MÍNIMOS

5.4.1. LA DERIVADA COMO MODELO DE OPTIMIZACIÓN

Resolvamos mediante una tabla de valores y su respectiva gráfica, el siguiente problema, propuesto en la sección 2.1.

Con un pedazo de cartón cuadrado de 900 cm^2 se desea construir una caja abierta de volumen máximo, es decir, aquella a la que le quepa la mayor cantidad de, por ejemplo, agua, arena, etc., cortando pequeños trozos cuadrados en las esquinas, cuya longitud x (en cm) es variable.

La herramienta que debemos utilizar para establecer la analogía entre el problema real y la función, es un modelo gráfico que nos lleve a asemejarla con el problema, como verás enseguida. Otra cuestión fundamental en la modelación es realizar un experimento mental que te permita imaginar el problema sin perder de vista la variabilidad, puesto que ello es lo más importante del modelo, lo cual es posible en la mayoría de estos problemas dada su naturaleza geométrica.

Atendamos las figuras siguientes, construidas con los datos que se dan del problema. Observa en las Figuras 5.10 cómo la variabilidad de x nos da para imaginar varias opciones para la caja que se quiere diseñar, así como las posibles medidas de sus lados.

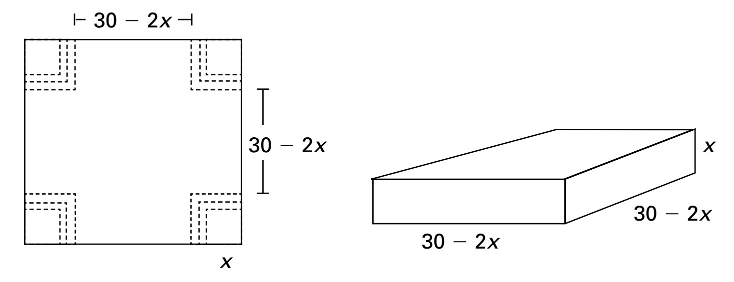


FIGURA 5.10. A la izquierda, diferentes posibilidades para el diseño de la caja considerando x variable. A la derecha, una instantánea de la variación de x.

A partir de ello, el trabajo a desarrollar consiste en los siguientes pasos:

a) Modelar el problema para determinar volumen máximo de la caja.
b) Determinar una función $V(x)$ para el volumen.
c) Diseñar una tabla de valores para diferentes cantidades de x.
d) Bosquejar la gráfica de $V(x)$.
e) Determinar los valores de x para los cuales el volumen es máximo.

Como ya mencionamos, a partir de la variación de x podemos deducir que existe una gran cantidad de posibilidades para el volumen de la caja. La Figura 5.11, a la derecha, es una de ellas. Esta última es una instantánea de la diversidad de variaciones que observamos en la figura inicial; no obstante, nos permitirá el análisis del problema.

De esta se desprende que la expresión para el volumen de la caja es:

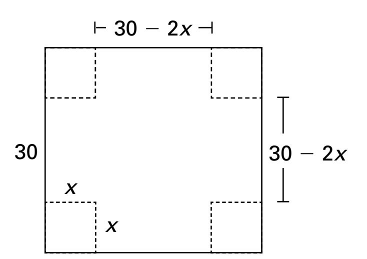


FIGURA 5.11. Vaciación de la caja en estado de constancia

$V(x) = (30 - 2x)^2x$, o bien: $V(x) = 4x^3 - 120x^2 + 900x$

La gráfica correspondiente aparece en la Figura 5.12, esta fue construida a partir de los valores de la Tabla 5.1 en tanto la función $V(x)$. De la tabla y la gráfica podemos concluir las siguientes cuestiones:

1. El volumen máximo que puede contener la caja se encuentra en la parte *más alta* de la gráfica y es de $V = 2.000$ cm^3.
2. El valor mínimo se encuentra en la parte *más baja* de la gráfica, en $x = 0$ y $x = 15$.
3. Los valores negativos de x no tienen sentido para el diseño de la caja.
4. Las dimensiones que debe tener la caja de volumen máximo son de $20 \times 20 \times \times 5$ cm.

TABLA 5.1

x	$V(x)$
0	0
1	784
2	1.352
3	1.728
4	1.936
5	2.000
6	1.944
7	1.792
8	1.568
9	1.296
10	1.000
11	704
12	432
13	208
14	56
15	0
16	64

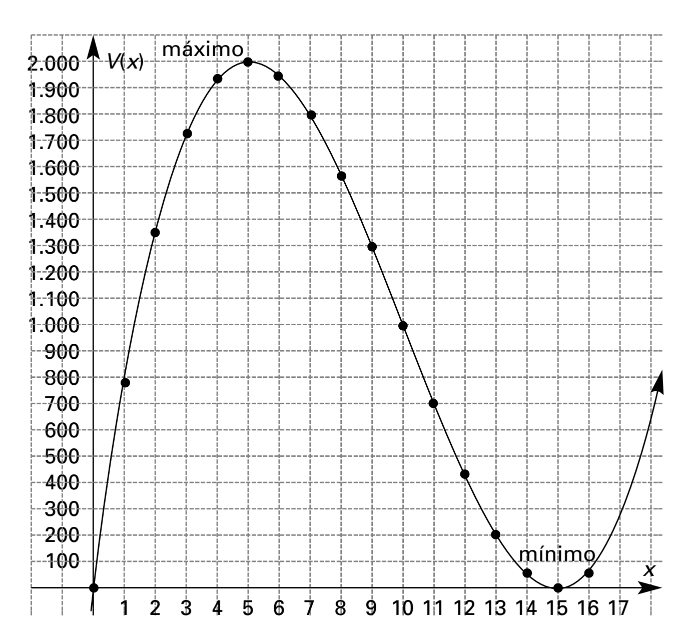


FIGURA 5.12. Gráfica que, muestra, el máximo y mínimo del volumen $V(x) = 4x^3 - 120x^2 - 900x$.

5. La gráfica cruza al eje x en $x = 0$ y $x = 15$.
6. La gráfica tiene volumen mínimo para $x = 0$ y $x = 15$, aún cuando para este valor el diseño de la caja no tiene sentido. El volumen mínimo es $V = 0$.

Por lo general los valores como $x = 5$, donde se encuentra el máximo, y $x = 15$, para el mínimo, son llamados *valores críticos* o *puntos críticos* de la gráfica.

El interés de haber presentado el problema anterior es dejar ver que para su solución es a veces suficiente una metodología semejante que no requiere de la derivación.

En la práctica de la solución de problemas que involucran movimiento, estos se presentan generalmente con un buen número de variables que requieren de un tratamiento pertinente que permita llegar a los resultados deseados. De esta manera, el diseño de la caja de volumen máximo del ejemplo anterior, estuvo sujeta al conocimiento del tamaño del cartón sobre la que se diseñó. En el proyecto de una curva circular en una carretera, la velocidad máxima con la que los vehículos transitarán sobre ella está sujeta al ángulo central mínimo de la curva. El área máxima de un terreno que se puede cercar con alambre está restringida por el perímetro del mismo. Tales condiciones establecen dos funciones que van entre cantidades máximas y mínimas íntimamente relacionadas. En este sentido, la cantidad que se desea optimizar es co-

múnmente llamada *función de optimización*, y aquella a la cual está sujeta, es llamada *función de restricción*.

Para esta parte del curso encontraremos ambas funciones en dos variables independientes como $F(x, y)$ para la función de optimización y $R(x, y)$ para la restricción, aun cuando pueden estarlo en solamente una variable, de manera que será posible sustituir una de las variables de $R(x, y)$ en aquella que le corresponde de $F(x, y)$, dejando esta última en una sola variable independiente bajo la forma $y = f(x)$.

En este sentido optimizar significa maximizar o minimizar una cantidad que se encuentra dentro de un proceso de variación. Como vimos en el ejemplo 1 de la sección [5-2], un objeto que fue lanzado verticalmente alcanzó su *máxima* altura cuando la derivada $s'(t)$ se hizo igual a cero; de igual forma se puede verificar para el ejemplo del diseño de la caja que la derivada de la función volumen es cero cuando $x = 5$ o bien $x = 15$. Usaremos este último argumento para dar solución a un buen número de problemas que serán planteados y resueltos enseguida, toda vez que en la última sección de este capítulo estableceremos proposiciones suficientes que aseguren la localización de los valores *absolutos* máximos o mínimos de las gráficas de las funciones que hasta ahora hemos visto, y otras combinaciones posibles que habremos de analizar. Vayamos a los problemas y su método de solución.

EJEMPLO 1

Use derivación para resolver el problema de la caja visto anteriormente.

SOLUCIÓN:

Puesto que la función que modela el problema es $V(x) = 4x^3 - 120x^2 + 900x$, derivando obtenemos:

$$V'(x) = x^2 - 240x + 900$$

Igualando a cero esta última, se tiene:

$$V'(x) = 0, \text{ o bien: } x^2 - 240x + 900 = 0$$

Usando la fórmula general, queda:

$$x = \frac{20 \pm \sqrt{400 - 300}}{2}$$

Siendo: $x_1 = 5$ y $x_2 = 15$, los valores críticos determinados a partir de la derivada: Sustituimos enseguida x_1 y x_2 en $V(x)$, quedando:

$$V(5) = 4(5)^3 - 240(5)^2 + 900(5) = 2.000$$
$$V(15) = 4(15)^3 - 240(5)^2 + 900(15) = 0$$

Puesto que $V(5) > V(15)$, se sigue que para $x_1 = 5$ el volumen $V(5) = 2.000$, es el máximo que puede tener la caja diseñada, en tanto que para $x_2 = 15$ el volumen $V(15) = 0$, es el mínimo.

EJEMPLO 2

¿De qué dimensiones debe ser el rectángulo de máxima área que se inscriba en el círculo $x^2 + y^2 = r^2$? ¿Cuál es el área máxima del rectángulo?

SOLUCIÓN:

La función de optimización es:

$$A(x, y) = 4xy \quad (1)$$

En tanto que la restricción viene dada por:

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad (2)$$

En la Figura 5.13 simulamos las diversas posibilidades que tiene el rectángulo para ser inscrito en el círculo; no obstante, solamente uno de ellos cuenta con área máxima. Hemos supuesto que es el rectángulo sombreado.

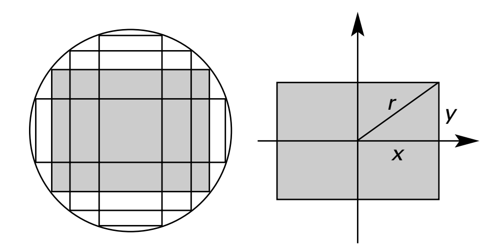


FIGURA 5.13. A la izquierda, diversos estados de constancia en la simulación del movimiento del rectángulo sobre el círculo; a la derecha, una de las variaciones.

Despejando y de (2) y sustituyéndola en (1) queda el área en una variable como:

$$A(x) = 4x\sqrt{r^2 - x^2} \quad (2)$$

Derivando (2), queda:

$$A'(x) = \frac{-8x^2 + 2r^2}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$

Igualando a cero esta última, resultan los valores críticos:

$$x_1 = \frac{r}{\sqrt{2}} \text{ y } x_2 = -\frac{r}{\sqrt{2}}$$

Es obvio que el valor negativo de x no tiene sentido para el problema, de aquí que aquel con el cual el área buscada es máxima sea $x = \frac{r}{\sqrt{2}}$. Sustituyendo este punto crítico en (2) queda $y = -\frac{r}{\sqrt{2}}$. De modo que el rectángulo es realmente un cuadrado. De (1) resulta el área máxima:

$$A_{\text{máx}} = 4\frac{r}{\sqrt{2}}\frac{r}{\sqrt{2}} = 2r^2u^2$$

EJEMPLO 3

Calcular las coordenadas del punto $P(x, y)$ de la curva $y = -x^2 + 1$, más próximo al punto $A(3, 0)$.

SOLUCIÓN:

La distancia entre los puntos $P(x, y)$ y $A(3, 0)$ viene dada por:

$$d = \sqrt{(x-3)^2 + y^2} \quad (1)$$

De aquí que (1) es la función de optimización. La restricción viene a ser la ecuación de la parábola:

$$y = -x^2 + 1 \quad (2)$$

Sustituyendo (2) en (1), queda:

$$d(x) = \sqrt{(x-3)^2 + (-x^2+1)^2}$$

O bien:

$$d(x) = \sqrt{x^4 - x^2 - 6x + 10}$$

Cuya derivada igualada a cero, es:

$$d(x) = \frac{4x^3 - 2x - 6}{2\sqrt{x^4 - x^2 - 6x + 10}}, \text{ es decir: } 4x^3 - 2x - 6 = 0$$

El valor del único punto crítico se determina aproximadamente, este es $x = 1{,}29$. De manera que las coordenadas del punto P buscado, son:

$$P(1{,}29, -066)$$

Véase la gráfica en la Figura 5.14.

Para verificar que efectivamente la distancia mínima se encuentra entre los puntos $A(3, 0)$ y $P(1{,}29, -0{,}66)$, determinemos las pendientes de la recta tangente a la curva en

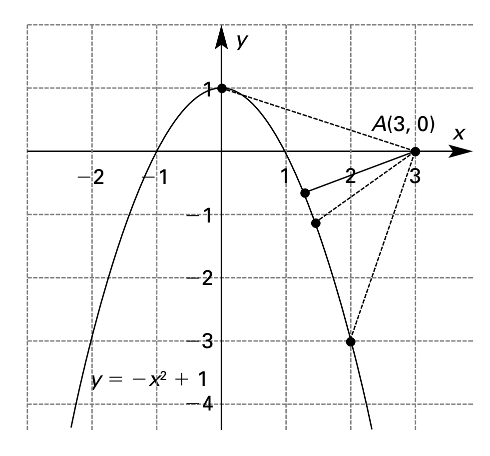


FIGURA 5.14. Diversas posibilidades para la distancia AP, más sólo una de ellas es mínima.

P y la pendiente de la recta AP, estas deben guardar la proporción $m_1 \cdot \frac{1}{m^2} = -1$, puesto que ambas rectas son perpendiculares; ¿por qué? De aquí se sigue que

$$m_{AP} = \frac{3 - 1{,}29}{0 - (-0{,}66)} = 2{,}59 \text{ y } m_2 = y'(1{,}29) = -2x = -2(1{,}29) = -2{,}59$$

De manera que se cumple con la condición anterior: $2{,}59\left(-\frac{1}{2{,}59}\right) = -1$.

EJEMPLO 4

Hallar dos números que sumen 20 y la suma de sus recíprocos sea máxima.

SOLUCIÓN.

Si los números son x e y, se tiene por función de optimización:

$$S = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \quad (1)$$

Y función de restricción:

$$x + y = 20 \quad (2)$$

Despejando y en (2) y sustituyéndola en (1), queda:

$$S = \frac{1}{x} + \frac{1}{(20 - x)}$$

Es decir:

$$S(x) = \frac{20}{x(20 - x)} = 20x^{-1}(20 - x)^{-1}$$

Derivando esta última se obtiene:

$$S'(x) = \frac{2x - 20}{x^2(20 - x)^2}$$

Igualando con cero resulta el único punto crítico siendo: $x = 10$. Al sustituir este último en (2) queda que $y = 10$. De aquí que la suma máxima resulta ser $S_{\text{máx}} = \frac{1}{10} + \frac{1}{10} = \frac{1}{5}$. Prueba, dando diferentes valores a x, que efectivamente esta es la suma máxima.

EJEMPLO 5

Calcular las dimensiones del cilindro de máximo volumen que se pueda inscribir en una esfera de radio r.

SOLUCIÓN:

Supongamos que la esfera es generada a partir del movimiento del semicírculo *PQSU* alrededor del eje *PU*, véase (fig. 1), en la secuencia de Figuras 5.15. Supóngase diferentes posibilidades de inscribir cilindros en la esfera, tal como aparece en la primera gráfica, los cuales son definidos a partir del movimiento de los rectángulos así inscritos sobre el mismo eje *PU*. No obstante, solo uno de ellos tendrá volumen máximo, véase (fig. 2), supongamos que es el generado por el rectángulo *RQST*. Consideremos, además, por x el radio del cilindro y h su altura, (fig. 3): El volumen vendrá dado por:

$$V = \pi x^2 h \quad (1)$$

Siendo (1) la función de optimización, mientras que (2) es la restricción:

$$r^2 = x^2 + \frac{1}{4}h^2 \rightarrow h = \sqrt{4(r^2 - x^2)} \quad (2)$$

Sustituyendo (2) en (1), queda la ecuación del volumen:

$$V(x) = 2\pi\sqrt{r^2x^4 - x^6} \quad (3)$$

Derivando esta última:

$$V'(x) = \frac{\pi(4r^2x^3 - 6x^5)}{\sqrt{r^2x^4 - x^6}}$$

Igualando a cero y despejando los puntos críticos que resultan, se tiene:

$$x = 0 \text{ y } x = \sqrt{\frac{2}{3}}x$$

Para $V(0)$ el volumen en (3) da cero, de aquí que en $x = 0$ el volumen es mínimo. Mientras que en $V\left(\sqrt{\frac{2}{3}}r\right) = \frac{4}{9}\sqrt{3}\pi \cdot r^3$, se tiene el volumen máximo del cilindro. Siendo su altura $h = \frac{2}{\sqrt{3}}r$.

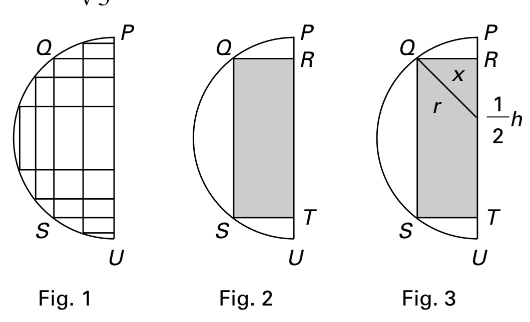


FIGURA 5.15. La figura 2 muestra una instantánea del movimiento del cilindro dentro de la esfera; esta última sirve para el análisis en la figura 3.

EJEMPLO 6

Determinar las dimensiones del cono de volumen máximo que es posible diseñar a partir de un cartoncillo circular de radio r, siendo el ángulo central θ variable.

SOLUCIÓN:

Las Figuras en 5.16 muestran el proceso de construcción del cono, en las cuales (fig. 1) r es el radio del círculo del cartoncillo y θ el ángulo central; en la (fig. 2) la longitud del arco es $r\theta$; véase el ejemplo 5 de la sección 5.1; y en la (fig. 3) R es el radio del cono así formado, con h su altura. Por su lado, el volumen de un cono cualquiera esta dado por:

$$v = \frac{1}{3}\pi \cdot r^2 h \quad (1)$$

De la (fig. 3) $h = \sqrt{r^2 - R^2}$ (2), más R es involucrado en la relación $2\pi \cdot R = r\theta$, de aquí que $R = \dfrac{r\theta}{2\pi}$ (3), sustituyendo (3) en (2) resulta:

$$h = \sqrt{r^2 - \left(\frac{r\theta}{2\pi}\right)^2} = \frac{r}{2\pi}\sqrt{4\pi^2 - \theta^2} \quad (4)$$

Sustituyendo ahora (3) y (4) en (1), queda el volumen del cono buscado:

$$v(\theta) = \frac{1}{24}\frac{r^3}{\pi^2}\sqrt{4\pi^2\theta - \theta^3} \quad (5)$$

Puesto que θ es variable, con r constante, derivemos (5), e igualemos con cero:

$$v'(\theta) = \frac{r^3}{48\pi^2}\frac{4\pi^2 - 3\theta^2}{\sqrt{4\pi^2\theta - \theta^3}} = 0$$

Siendo $\theta^2 = \dfrac{4\pi^2}{3}$, o bien: $\theta = \dfrac{2\pi}{\sqrt{3}} \approx 207{,}84°$.

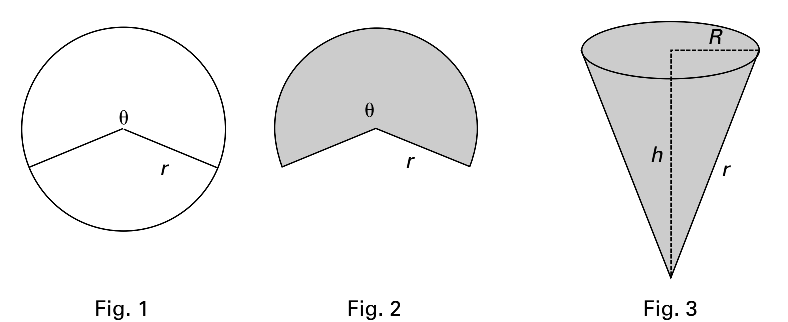


FIGURA 5.16. Proceso de construcción del cono de volumen máximo a partir del círculo dado.

EJEMPLO 7

Un rayo de luz pasa a través del punto de coordenadas $A(0, a)$ reflejándose en el espejo OBx, pasando finalmente por el punto de coordenadas $C(1, b)$. ¿Para qué valores de α y β la longitud que alcanzan los rayos sobre el modelo es mínima?

SOLUCIÓN:

Las longitudes que alcanzan los rayos en el modelo son las siguientes:

$$AB = \sqrt{x^2 - a^2} \ \text{ y } \ BC = \sqrt{(x-1)^2 + (0-b)^2}$$

De aquí que la longitud total que recorren sea:

$$L(x) = AB + BC = \sqrt{x^2 - a^2} + \sqrt{(x-1)^2 + b^2} \quad (1)$$

Siendo (1) la función de optimización la cual es restringida a las condiciones del modelo.

Derivando (1) queda:

$$L'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}} - \frac{1-x}{\sqrt{(x-1)^2 + b^2}}$$

Igualando con cero, resulta:

$$\frac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{1-x}{\sqrt{(x-1)^2 + b^2}}$$

Mas obsérvese en la Figura 5.17 que:

$$\text{sen}\,\alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}} \ \text{ y } \ \text{sen}\,\beta = \frac{1-x}{\sqrt{(x-1)^2 + b^2}}$$

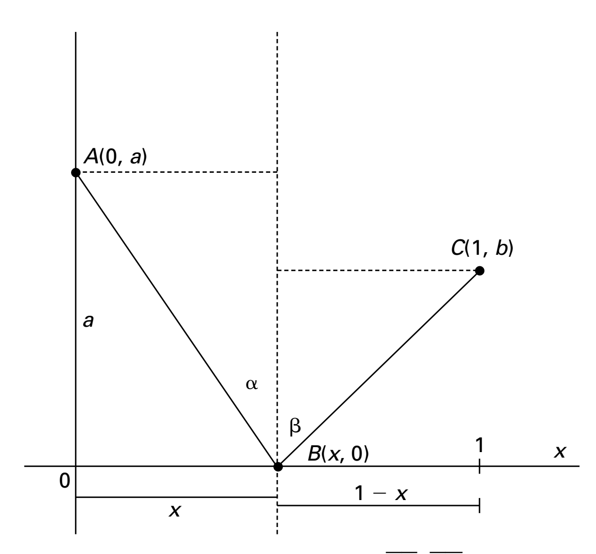


FIGURA 5.17. Simulación del reflejo del rayo $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ sobre el espejo OBX.

De aquí que para que la distancia *ABC* recorrida por los rayos sea mínima, sería necesario que $AB = BC$, o bien:

$$\text{sen } \alpha = \text{sen } \beta, \text{ es decir, que } \alpha = \beta$$

Esta última es conocida como *ley de reflexión*, la cual establece la proporción:

$$\frac{\text{sen } \alpha}{\text{sen } \beta} = \frac{v_1}{v_2} = 1 \qquad [5\text{-}3]$$

Donde v_1 y v_2 son las velocidades respectivas de los rayos *AB* y *BC*.

Con pocos arreglos al modelo anterior se llega al modelo de refracción; véase la Figura 5.18. En este caso es fácil probar que para que la distancia *ABC* recorrida por los rayos sea mínima los senos de los ángulos de incidencia y refracción deben ser distintos, es decir, $\text{sen } \alpha \neq \text{sen } \beta$, o sea:

$$\frac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}} \neq \frac{x - 1}{\sqrt{(x - 1)^2 + b^2}}$$

De aquí que la ley de refracción cambie respecto de [5-3] como:

$$\frac{\text{sen } \alpha}{\text{sen } \beta} = \frac{v_1}{v_2} = k \qquad [5\text{-}4]$$

Donde k es llamada *índice de refracción*, el cual depende del material sobre el cual se refracta el rayo: $k = 1{,}33$ para el agua, 1,311 para el hielo, 2,41 para el diamante rojo, 1,551 para el cuarzo azul, 1,526 para el vidrio crown, etc. En realidad el valor constante k es el que suministran las observaciones; podemos asumir como consecuencia que la luz se propaga realmente entre *AB* y *BC* en el tiempo más corto posible. La regla [5-4] es también conocida en la física como *Ley de Snell*.

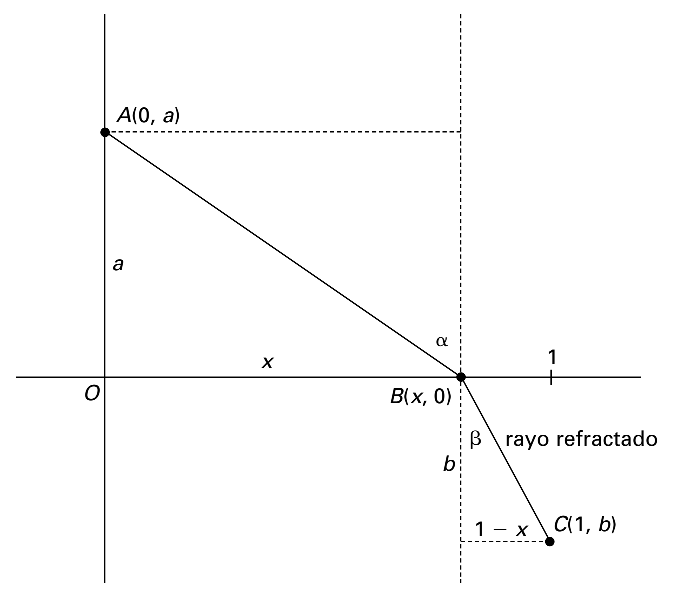


FIGURA 5.18. Rayo refractado en $B(x, 0)$.

EJEMPLO 8

Suponga el modelo expuesto en la Figura 5.18 con $A(0, 1)$ y $C(1, -2)$. Determine: a) las coordenadas del punto $B(x, 0)$, b) los ángulos de incidencia y refracción α y β, c) el índice de refracción k, y d) la distancia mínima recorrida por los rayos.

SOLUCIÓN:

a) De acuerdo al modelo: $d = ABC$, con:

$$d = \sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{(1 - x)^2 + 4} \quad (1)$$

Cuya derivada igualada a cero es:

$$d'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} - \frac{1 - x}{\sqrt{(1 - x)^2 + 4}} = 0$$

De donde:

$$\frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{1 - x}{\sqrt{(1 - x)^2 + 4}} \leftrightarrow x\sqrt{(1 - x)^2 + 4} = (1 - x)\sqrt{x^2 + 1}$$

Elevando al cuadrado y reduciendo términos queda:

$$x^4 - 6x^2 + 1 = 0$$

Cuya solución, usando la fórmula general es, desechando además los valores negativos,

$$x_1 = 2{,}414 \ \text{ y } \ x_2 = 0{,}42$$

Sustituyendo x_1 y x_2 en (1) nos queda que:

$$d(2{,}414) = 2{,}61 + 2{,}45 = 5{,}06u$$
$$d(0{,}42) = 1{,}08 + 2{,}08 = 3{,}16u$$

De aquí que para $x = 0{,}42$ la distancia recorrida por los rayos de incidencia y refracción, en el modelo, es mínima, siendo las coordenadas del punto $B(0{,}42, 0)$.

b) Considerando que: $\operatorname{sen} \alpha = \dfrac{0{,}42}{1{,}08} = 0{,}3888$ y $\operatorname{sen} \beta = \dfrac{0{,}58}{2{,}08} = 0{,}2788461$.

Luego: $\alpha = 22{,}88°$ y $\beta = 16{,}19°$.

c) Del inciso anterior $k = \dfrac{\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{sen} \beta} = 1{,}39$, lo cual indica que el rayo incide en un medio oscuro.

d) $d_{\text{mín}} = 3{,}16u$.

EJEMPLO 9

Se quiere diseñar una ventana como la que se muestra en la Figura 5.19. ¿Cuáles deben ser las dimensiones de la ventana si debe poseer un área interior de 4 m²?

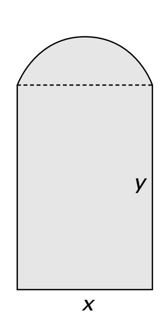


FIGURA 5.19. Ventana de perímetro mínimo coronada por un semicírculo.

SOLUCIÓN:

El área de la ventana viene dada por la relación:

$$xy + \frac{1}{2}\pi\left(\frac{1}{2}x\right)^2 = 4 \quad (1)$$

Siendo esta última la restricción, la función de optimización es:

$$P = 2x + 2y + 2\pi\left(\frac{x}{2}\right) \quad (2)$$

Despejando y de (1) queda:

$$y = \frac{4}{x} - \frac{1}{8}\pi x \quad (3)$$

Sustituyendo (3) en (2):

$$P(x) = 2x + 2\left(\frac{4}{x} - \frac{1}{8}\pi x\right) + \pi x$$

O bien:

$$P(x) = 2x + 8x^{-1} - \frac{1}{4}\pi x + \pi x$$

$$P(x) = 4{,}356x + 8x^{-1}$$

Derivando esta última expresión e igualando con cero, queda:

$$P'(x) = 4{,}356 - 8x^{-2} = 0$$

Despreciando el término negativo de x, resulta:

$$x^2 = 1{,}836 \rightarrow x = 1{,}355 \text{ m}$$

Sustituyendo $x = 1{,}355$ en (3), se tiene:

$$y = \frac{4}{1{,}355} - \frac{1}{8}\pi(1{,}355) = 2{,}42 \text{ m}$$

Siendo las dimensiones buscadas $x = 1{,}355$ m, $y = 2{,}42$ m, y el segmento semicircular $\pi r = \pi\left(\frac{1{,}355}{2}\right) = 2{,}218$ m. De aquí que la cantidad lineal de material que se requiere para construir la ventana es:

$$1{,}355 + 2{,}42 + 2{,}218 = 5{,}993 \text{ m}$$

En caso de incluir el diámetro del semicírculo en la ventana, habría que agregar otros 1,355 m.

Es fácil verificar que no existe error en los cálculos anteriores si se determina el área de la ventana, la cual debe dar los 4 m^2.

5.4.2. MULTIPLICADORES DE LAGRANGE (OPCIONAL)

En los ejemplos anteriores hemos optimizado cantidades a partir de reconocer las funciones $F(x, y)$ de optimización y $R(x, y)$ de restricción. El método de Lagrange que expondremos enseguida funciona a partir de estas dos expresiones, toda vez que elimina pasos en los cálculos como los hemos obtenido; no obstante, toma validez en los problemas que involucran de dos variables independientes en adelante. El fundamento del método no será expuesto aquí, debido a que tiene que ver más con análisis de funciones en varias variables.

La idea central del método consiste en determinar los valores máximos o mínimos de la función de optimización $F(x, y)$ sujeta a la restricción $R(x, y)$, partiendo del supuesto de su existencia.

El método consiste en las siguientes reglas:

1. Formar la función $f(x, y) = F(x, y) + \lambda R(x, y)$, en la cual λ es un valor constante de apoyo llamado *multiplicador*.
2. Encontrar las derivadas de f, es decir $\frac{df}{dx}$ y $\frac{df}{dy}$ (véase el ejemplo 4 de la sección 4-3) e igualarlas con cero.
3. Resolver el sistema de ecuaciones $\begin{cases} \dfrac{df}{dx} = 0 & (1) \\ \dfrac{df}{dy} = 0 & (2) \\ R(x, y) = 0 & (3) \end{cases}$

Resolvamos por este método el ejemplo 2 de la sección anterior. En este $A(x, y) = 4xy$ y $R(x, y)$ se puede escribir como: $R(x, y) = x^2 + y^2 - r^2$. De aquí que la función f es:

$$f(x, y) = 4xy + \lambda(x^2 + y^2 - r^2)$$

Derivando esta última, queda:

$$\frac{df}{dx} = y + 2\lambda x = 0, \ y + 2\lambda x = 0 \quad (1)$$

$$\frac{df}{dy} = x + 2\lambda y = 0, \ x + 2\lambda y = 0 \quad (2)$$

Con:

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad (3)$$

Despejando el multiplicador λ en (1) y (2) e igualando, queda:

$$\lambda = \frac{-y}{2x} = \frac{-x}{2y}, \text{ de donde } y = \pm x$$

Sustituyendo $y = \pm x$ en (3) resulta:

$$x^2 + (\pm x)^2 = r^2 \rightarrow 2x^2 = r^2$$

O bien $x = \frac{r}{\sqrt{2}}$ para $y = \frac{r}{\sqrt{2}}$, que son los mismos valores críticos obtenidos por el método visto anteriormente.

EJEMPLO 1

Determine los valores máximos o mínimos conocidas las funciones: de optimización $F(x, y) = x^2y$, y de restricción $R(x, y) = x + y - 1$.

SOLUCIÓN:

Siendo $f(x, y) = x^2y + \lambda(x + y - 1)$, resulta el sistema de ecuaciones:

$$\frac{df}{dx} = 2xy + \lambda,\ 2xy + \lambda = 0 \quad (1)$$

$$\frac{df}{dy} = x^2 + \lambda,\ x^2 + \lambda = 0 \quad (2)$$

$$x + y = 1 \quad (3)$$

De (1) y (2): $\lambda = -2xy = -x^2$.

Siendo: $y = \frac{-x}{2}$, sustituyendo esta última en (3) queda:

$$x - \frac{x}{2} = 1 \leftarrow x = 2, \text{ con } y = -1$$

De pronto no es posible precisar la naturaleza, máximo o mínimo, del punto $(2, -1)$.

ACTIVIDADES Y EJERCICIOS DE LAS SECCIONES 5.3 Y 5.4

I. Aplique la regla [5-2] de L'Hôpital para resolver los siguientes límites.

1. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg} x}{\ln\left(x - \frac{\pi}{2}\right)}$

2. $\lim\limits_{x \to 1} (1 - x) \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}\right)x$

3. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x^2}{\sqrt{\operatorname{sen} x}}$

4. $\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{1}{x^2}\right)^{\operatorname{tg} x}$

5. $\lim_{x \to 0} \dfrac{\ln x}{(1-x)^3}$

6. $\lim_{x \to 0} \dfrac{a^x}{x}$

7. $\lim_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$

8. $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sec x}{x}$

9. $\lim_{x \to \infty} \dfrac{\cos x}{x}$

10. $\lim_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x}{x}$

11. $\lim_{x \to 1} \dfrac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{x^3 - 7x + 6}$

12. $\lim_{x \to \infty} x^{\frac{1}{x}}$

13. $\lim_{x \to 1} \left(\dfrac{x}{x-1} - \dfrac{1}{\ln x} \right)$

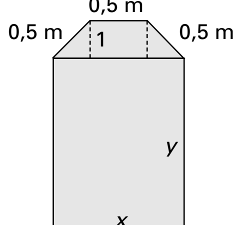
14. $\lim_{x \to 3} \left(\dfrac{1}{x-3} - \dfrac{7}{x^2 - x - 6} \right)$

II. Resuelva los siguientes problemas de optimización modelandolos a través de una función $f(x)$; luego, haga una tabla de valores y diseñe la gráfica correspondiente para determinar el valor máximo o mínimo que se pide.

15. Encuentre las dimensiones del cartoncillo con el que se puede diseñar una caja sin tapa cuyo volumen debe ser de 4.000 cm^3.

16. Se desea vaciar una cierta cantidad de refresco en una lata cilíndrica de volumen 355 cm^3. Se pide determinar las dimensiones que debe tener la lata para que la superficie de su diseño sea mínima.

17. Determine las dimensiones de una puerta coronada por un semi-hexágono, que se desea construir, como la que se muestra en la figura, de manera que su área sea de 5 m^2.



III. Resuelva los siguientes problemas de optimización identificando las funciones de optimización y restricción, derivando.

18. Partir una recta AB en dos partes AC y CB, de modo que el producto $\overline{AC}^2 \cdot CB$, sea máximo.

19. Del problema anterior se desprende el siguiente teorema que se adjudica al matemático inglés Colin MacLaurin (1690-1746): *Si una línea* AB *es dividida por un número de segmentos* AC, CD, DE, EB, *el producto de todos estos segmentos será máximo, cuando las partes sean iguales entre sí.* Pruebe el teorema de MacLaurin haciendo, por lo menos, la división del segmento AB en dos segmentos AC y CB.

20. Encuentre el triángulo rectángulo de mayor área que se pueda construir sobre una línea recta $AB = a$ dada.

21. Inscriba en una esfera de radio r un cilindro que tenga volumen máximo.

22. Encuentre las dimensiones del rectángulo de mayor área posible que se puede inscribir en el segmento de parábola $y^2 = 2px$.

23. Encuentre el punto $P(x, y)$ sobre la curva $y = \dfrac{1}{1 + x}$, de modo que la distancia de P al punto de coordenadas $A(1, -1)$ sea mínima.

24. Un recipiente esta formado por un cilindro terminado en sus partes superior e inferior por semiesferas; considerando que el espesor de sus paredes es constante, ¿cuáles son las dimensiones que deberá tener dicho recipiente para que, sin variar su volumen, se gaste en hacerlo la menor cantidad de material?

25. Encuentre las dimensiones del cono de volumen máximo que pueda ser inscrito en una esfera de radio R.

26. Dados los ejes $2a$ y $2b$ de una elipse, determine las dimensiones del rectángulo de área máxima que se le puede inscribir.

27. Un haz de luz incide sobre una superficie de un vidrio cuyo índice de refracción $k = 1{,}65$, con ángulo de incidencia $a = 60°$. Calcule el ángulo de refracción β.

28. Si la velocidad de la luz en el aire es de 300.000 km/seg, y en un vidrio claro es de 200.000 km/seg. ¿Cuál es el índice de refracción del vidrio?

29. Un rayo de luz incide sobre una superficie refractándose según el modelo de la Figura 5.18, vista anteriormente. Siendo $A(0, 2)$, $B(x, 0)$ y $C(1{,}5, -3)$, $0 < x < 1{,}5$, encuentre:

a) La abscisa x del punto $B(x, 0)$.
b) Los ángulos de incidencia y refracción.
c) El índice de refracción y la distancia mínima recorrida por los rayos.

30. Resuelva de manera semejante al problema 29, el modelo contiene $A(0, 0)$, $B(x, 0)$ y $C(2, 3)$, $0 < x < 3$.

IV. Haga uso del método de los multiplicadores de Lagrange para resolver los siguientes problemas.

31. En el diseño de una lata de refresco se debe utilizar 230 cm^2 de material. ¿Cuáles son las dimensiones de la lata si se desea que el volumen sea máximo?

32. Determine los valores máximo o mínimo, si los hubiera, para la función de optimización $F(x, y) = xy^2 + y$, dado que la restricción es: $R(x, y) = x^2 + y^2 - 9$.

5.5. ANÁLISIS DE LA VARIACIÓN DE FUNCIONES

5.5.1. MÁXIMOS Y MÍNIMOS

Recordemos que en los problemas de optimización, resueltos anteriormente, hicimos $f' = 0$ para encontrar los valores críticos que maximizan o minimizan las cantidades en juego. En la práctica del cálculo diferencial se ha establecido la siguiente regla para determinar los valores críticos candidatos a ser máximos o mínimos.

Se iguala f$' = 0$ *con cero o se verifica para qué valores es indeterminada, lo cual da los valores críticos que pueden corresponder a un máximo, mínimo, asíntotas o crestas. Después, se sustituyen estos valores en las derivadas sucesivas, la primera derivada que no se anula, deberá ser de rango par y, entonces, habrá un máximo si ella es negativa, mínimo si es positiva.*

[5-5]

La regla anterior se ha podido establecer a partir del principio por el cual una función es creciente si su derivada f' es positiva o mayor que cero, o *decreciente* si f' es menor que cero o negativa. Si f tiene un máximo en $x = a$, la función debe ser, alrededor de este valor, antes, creciente, posterior, decreciente, es decir f' pasa de ser positiva a negativa en la exigencia de $f' = 0$ o infinita. En esta y en las secciones siguientes nos avocaremos a analizar ambos casos, es decir, $f' = 0$ o f' indeterminada.

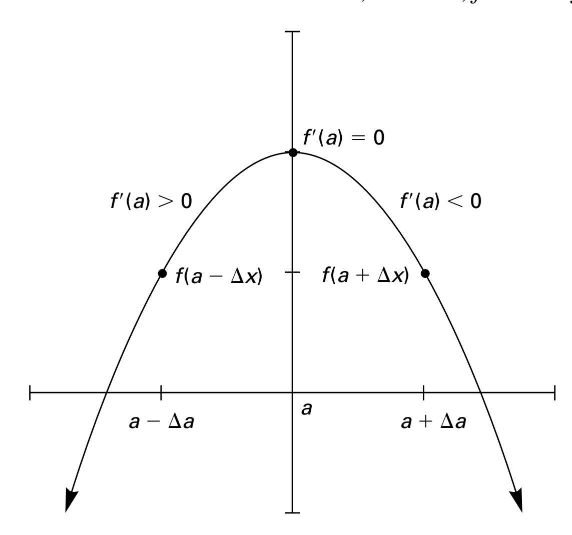


FIGURA 5.20. $f(x)$ es creciente antes de $x = a$ y decreciente después de éste valor.

Si admitimos que $f' = 0$ en $x = a$, antes de a la función crece siendo $f' > 0$, posterior a a la función decrece siendo $f' < 0$ (véase figura 5.20). De esta manera, en un entorno cercano al valor máximo $-\Delta x < a < \Delta x$, la función se comporta como $f(a - \Delta x)$ y $f(a + \Delta x)$. En ambos casos es cierto que:

$$f(a - \Delta x) - f(a) < 0 \text{ y } f(a + \Delta x) - f(a) < 0$$

Si admitimos los desarrollos de estas últimas expresiones usando la ecuación de variaciones [4-4] hasta la segunda derivada, tendremos:

$$-f'(a)\Delta x + f''(a)\frac{(\Delta x)^2}{2} - \ldots < 0 \quad (1)$$

$$f'(a)\Delta x + f''(a)\frac{(\Delta x)^2}{2} + \ldots < 0 \quad (2)$$

En ambos casos, para $f'(a) = 0$, resulta la condición $f''(a) < 0$. Lo cual indica que, efectivamente, en $x = a$ hay un máximo. Lo cual deja ver la certeza de la regla [5-5].

Lo mismo se sigue para un mínimo, es decir $f''(a) > 0$, para $f'(a) = 0$, siendo que en $x = a$ hay un mínimo.

EJEMPLO 1

Verifique si la función $f(x) = x^4 - x^2$, cuenta con máximos y mínimos.

SOLUCIÓN:

Para mostrarlo es suficiente con las dos primeras derivadas de la función; tenemos que:

$$f'(x) = 4x^3 - 2x \text{ y } f''(x) = 12x^2 - 2$$

Igualando con cero la primera derivada, resulta:

$$f' = 0 \rightarrow x(4x^2 - 2) = 0$$

Siendo los puntos críticos de la primera derivada:

$$x = 0 \text{ y } x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Sustituyendo los valores críticos en la segunda derivada, se tiene: $f''(0) = -2 < 0$. Esto último indica que en $x = 0$ con $y = 0$, la función f cuenta con un máximo. Para $f''\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 4 > 0$. De aquí que el criterio deja ver que en $x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$, $y = -\frac{1}{4}$, f tiene dos mínimos. La gráfica correspondiente aparece en la Figura 5.21.

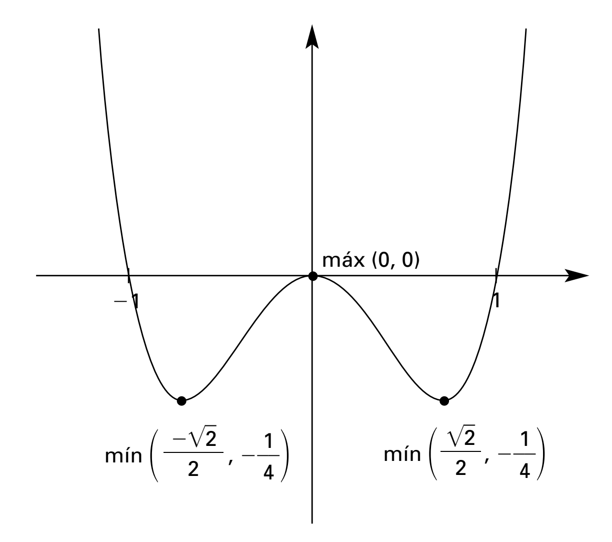


FIGURA 5.21. El criterio $f'(x) = 0$, asume un máximo y dos mínimos para $f(x)$.

La función f, además, decrece en los intervalos $\left(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ y $\left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ en los cuales es sencillo de verificar que $f' < 0$, f crece en $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$ y $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \infty\right)$, siendo en estos $f' > 0$.

5.5.2. EL TEOREMA DE ROLLE

Uno de los teoremas importantes del cálculo diferencial es el teorema de Rolle; asume lo siguiente:

Si f *es continua en el intervalo* [a, b] *anulándose para* f(a) = 0 *y* f(b) = 0, *y tiene derivadas* f′(x) *en el interior del intervalo, entonces existe por lo menos un valor de* x = c *dentro del intervalo en el que* f′(c) = 0.

[5-6]

El teorema plantea tres argumentos fundamentales, y una conclusión que de ellos se desprende; estos son:

1. $f(a) = f(b) = 0$
2. f es continua en $a \leq x \leq b$.
3. f es diferenciable en $a < x < b$.

Y como consecuencia de estos:

La función f cuenta con un máximo o mínimo en el en $x = c$ dentro del intervalo, es decir $f'(c) = 0$.

La gráfica de la Figura 5.22 ilustra el teorema.

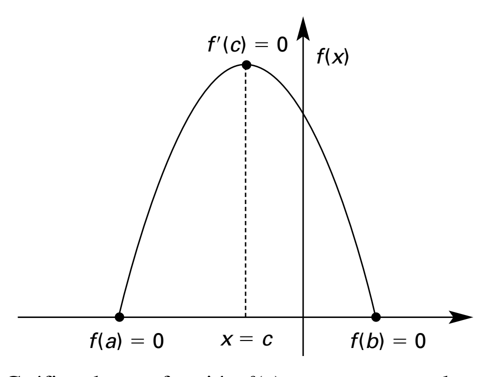


FIGURA 5.22. Gráfica de una función $f(x)$ que se asume al teorema de Rolle.

La función constante $y = 0$ es un caso particular del teorema de Rolle en un intervalo $a \leq x \leq b$, puesto que cumple con los tres primeros argumentos. De ello se desprende que existe $x = c$, tal que $f'(c) = 0$. Más supongamos que $f \neq 0$, de aquí se

sigue que f es positiva o negativa (arriba o debajo del eje x) entonces f debe tener un máximo o mínimo.

Lo interesante del teorema es que a partir de las tres condiciones *encierra* al valor donde se encuentra el probable máximo o mínimo de la función.

EJEMPLO 1

Pruebe que la función $f(x) = x^2 - x$ cumple con las condiciones del teorema de Rolle, en el intervalo [0, 1].

SOLUCIÓN:

El dominio de la función son todos los reales, además la función se anula para $x = 0$ y $x = 1$, de aquí que:

1. $f(0) = f(1) = 0$.
2. La función está definida en el intervalo [0, 1] puesto que [0, 1] pertenece a los reales.
3. La función es diferenciable en (0, 1) ¿por qué no se asume que la función cuenta con derivada en los extremos del intervalo?

Luego existe $x = c$ en el intervalo (0, 1) en el cual la función f tiene un máximo o mínimo.

Derivando $f(x) = x^2 - x$, se tiene $f'(x) = 2x - 1, f''(x) = 2$, igualando con cero:

$$2x - 1 = 0 \rightarrow x = c = \frac{1}{2}, \text{ con } 0 < \frac{1}{2} < 1$$

Sustituyendo $c = \frac{1}{2}$ en la segunda derivada, $f''\left(\frac{1}{2}\right) = 2 > 0$. De aquí que en $c = \frac{1}{2}$ $y = -\frac{1}{4}$ la función f tiene un mínimo.

5.5.3. EL TEOREMA DEL VALOR MEDIO

Supongamos una función f que cumpla con los tres argumentos fundamentales del teorema de Rolle, de manera que tenga un mínimo en $x = c$ y cuya gráfica sea semejante a la de la Figura 5.23.

Dada la gráfica, diremos que la curva está *anclada* en la recta AB de ecuación $y = 0$. Estimemos que la curva es una *cuerda* que puede ser movida desde cualquiera de los puntos fijos $A(a, 0)$ y $B(b, 0)$.

Movamos verticalmente los puntos $A(a, 0)$ y $B(b, 0)$ sobre las rectas punteadas, paralelas al eje y, como se deja ver en la Figura 5.24, hasta una nueva posición $A(a, f(a))$, $B(b, f(b))$, con $f(a)$ y $f(b)$ distintos de cero.

Puesto que el movimiento es vertical, el punto P, donde se coloca el mínimo, también se movió sobre el eje vertical que le cruza, en tanto que en la nueva posición la recta AB tiene ahora por ecuación:

$$y = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{x - a}(x - a) \quad (1)$$

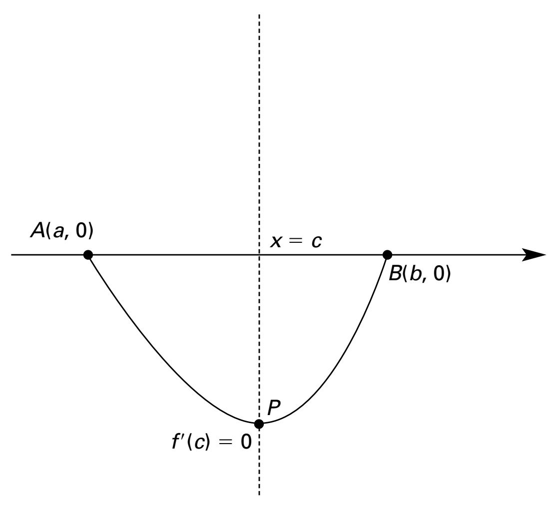


FIGURA 5.23. Curva «anclada» en *A* y *B*.

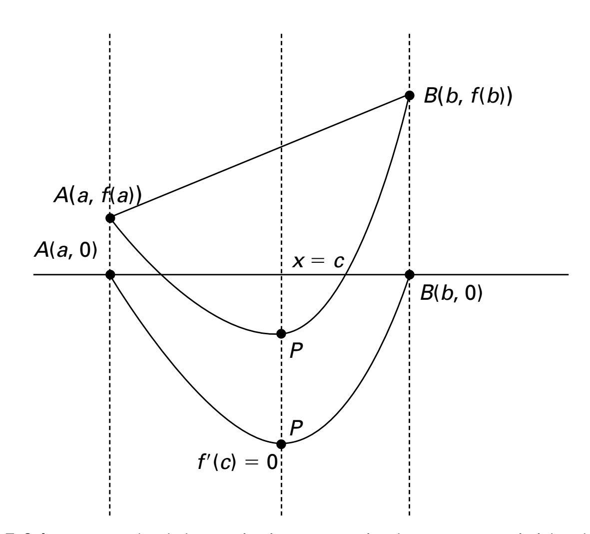


FIGURA 5.24. Después del movimiento vertical, nueva posición de $f(x)$.

El movimiento de los puntos *A* y *B* es sujeto a la diferencia de ordenadas entre la función $f(x)$ y la recta *y*.

La simulación anterior da para establecer la gráfica de una nueva función auxiliar que llamaremos $F(x)$, cuya ecuación está dada por la diferencia entre $f(x)$ y la recta *y*, es decir:

$$F(x) = f(x) - \left[f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \right] \quad (2)$$

Derivando esta última obtenemos:

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad (3)$$

Por el teorema de Rolle, existe un valor de $x = c$ para el cual $F'(x) = 0$ y para el cual, efectivamente, F tiene un máximo o mínimo, puesto que partimos de esa condición. De aquí se sigue que, de (3):

$$0 = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

O bien:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \qquad [5\text{-}7]$$

La expresión [5-7] se deduce, además, geométricamente de la Figura 5.25. Obsérvese cómo el movimiento de la recta tangente en P, donde $f' = 0$, se hace paralela con la nueva posición de la recta AB, de aquí que, por la semejanza del triángulo formado por los diferenciales en $x = c$ con el triángulo ABC, se llega a [5-7], es decir:

$$\frac{dy}{dx} = f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

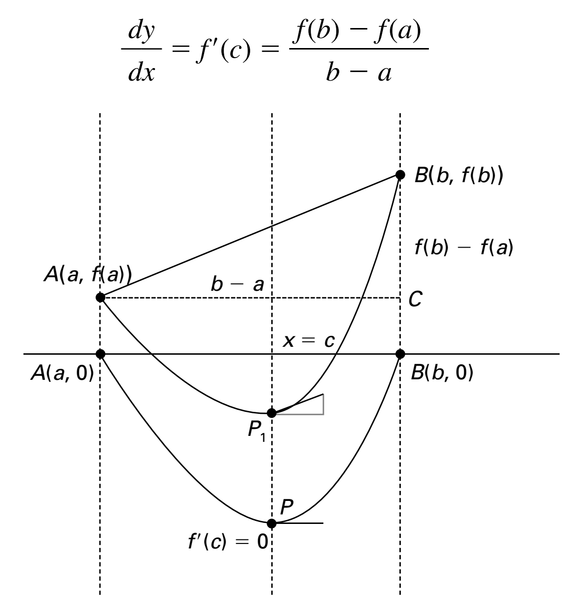


FIGURA 5.25. La expresión $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ se deduce de la Figura 5.25.

La proposición [5-7] es conocida como *teorema del valor medio* o *teorema de Lagrange*. Los argumentos en los que se sustenta son:

1. f es continua en el intervalo $[a, b]$.
2. f es diferenciable en (a, b).

Y como consecuencia:

> *Existe un punto* x = c *en* (a, b) *en el cual la pendiente de la recta secante entre los puntos* A *y* B *es paralela (véase la Figura 5.24) a la pendiente* f′(c) *de la curva* f *en* x = c.

Es común escribir el teorema como $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$.

EJEMPLO 1

Suponga $f(x) = x^3 - 3x + 1$, con $f(0) = 1$ y $f(2) = 3$, con los cuales se determina la ecuación de la recta entre ambos, es decir $y = x + 1$, con pendiente $m = 1$. Se desea mostrar que en el intervalo [0, 2] la función f cuenta con un valor $x = c$, en el cual $f'(c) = m = 1$.

SOLUCIÓN:

Construyamos la función:

$$F(x) = x^3 - 3x + 1 - (x + 1)$$

La resta de f con y obedece a que la recta se encuentra por encima de la función. Quedando:

$$F(x) = x^3 - 4x = x(x^2 - 4) \quad (1)$$

La función (1) que resulta, es anclada en $x = 0$ y $x = 2$, y cumple con los argumentos del teorema de Rolle, de modo que debe contar con un máximo o mínimo en el intervalo [0, 2]. Derivando (1) e igualando con cero, queda:

$$F'(x) = 3x^2 - 4 = 0, \; x = c = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

Siendo que $f'(x) = 3x^2 - 3$, entonces $f'\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) = 3\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 - 3 = 1$. Además $f''(x) = 6x$, o bien $f''\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) = 6\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 > 0$, de aquí se sigue que en $c = \frac{2}{\sqrt{3}}$ la pendiente de la recta tangente en f es 1, al igual que la pendiente m de la recta secante, $y = x + 1$, inicial.

5.5.4. DEFINICIÓN DE PUNTO DE INFLEXIÓN DE UNA CURVA

En el Capítulo 2 llamamos *punto de torcedura* a los valores críticos de la función f donde esta cambia de curvatura, es decir, la curva se *tuerce* dando un giro de 180° al pasar por el punto crítico saliendo de este con la concavidad invertida. Para la función f la *concavidad* significa que ella tiene un *hueco*.

En el caso de la función $f(x) = (x - 1)(x - 2)(x - 3)$ o bien $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$, hemos determinado los valores críticos donde la gráfica tiene máximos y mínimos, siendo que la primera derivada se anula para $f'(1{,}42) = f'(2{,}57) = 0$, las coordenadas respectivas en ambos valores, son:

$$\text{Máx } (1{,}42,\ 0{,}385), \quad \text{Mín } (2{,}57,\ -0{,}384)$$

Sin embargo, la curva cuenta con un punto de torcedura en $x = 2$ que no consigna la información de la primera derivada al ser igualada con cero. Por lo general, estos valores son llamados *puntos de inflexión* y aparecen al igualar a cero la segunda

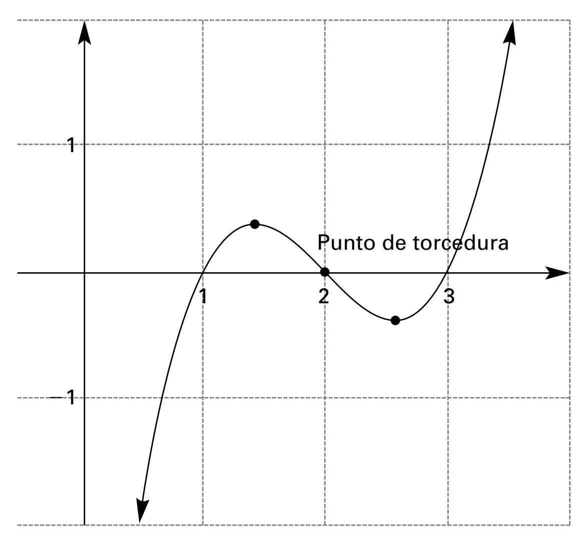


FIGURA 5.26. En la gráfica $x = 2$ es un «punto de torcedura» para $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$.

derivada. Para el ejemplo citado, $f''(x) = 6x - 12$, o bien $6x - 12 = 0 \rightarrow x = 2$, de aquí que resulta cierta la afirmación para $f'' = 0$. (Véase la figura 5.26).

Si bien el criterio de $f'' = 0$ es *necesario*, este no es *suficiente* para cualquier función, puesto que existen casos donde ello no se cumple. Por ejemplo, en $f(x) = x^4 - x$, la primera derivada $f'(x) = 4x^3 - 1$, consigna un mínimo en $x = \dfrac{1}{\sqrt[3]{4}} = 0{,}62$, de manera que la segunda derivada igualada con cero $f''(x) = 12x^2 = 0$, precisaría que en $x = 0$ hubiera un punto de inflexión, lo cual no ocurre, véase la Figura 5.27.

No obstante, la concavidad es asociada a la segunda derivada de f, recordemos que el criterio expuesto en la regla [5-5] deja ver que si en $x = a$ se tiene un máximo, entonces $f''(x) < 0$, lo cual debe ser relacionada a la concavidad *hacia abajo* de la cur-

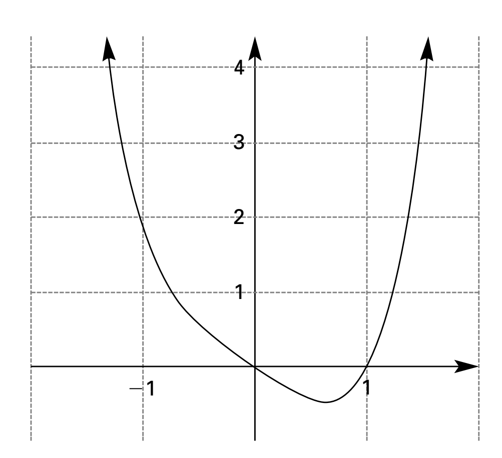


FIGURA 5.27. A pesar de que $f''(2) = 0$, en $x = 2$ no existe punto de inflexión.

va, en el caso del mínimo la concavidad de la curva es *hacia arriba*, con $f''(x) > 0$. En este sentido, los puntos de inflexión *son límites* de las concavidades de la curva; si observamos el caso de la Figura 5.25, la concavidad hacia abajo de f se encuentra en los límites de menos infinito a 2, cambiando a ser cóncava hacia arriba entre 2 e infinito. Ello significa que el punto de inflexión se encuentra entre los cambios de concavidad de la curva, quedando, en otras palabras, entre $f'' < 0$ y $f'' > 0$, en el caso de cambiar de cóncava hacia abajo a cóncava hacia arriba y viceversa de cóncava hacia arriba a cóncava hacia abajo, entre $f'' > 0$ y $f'' < 0$. De ello resulta que la recta tangente en el punto de inflexión cruza la curva de *arriba* hacia *abajo* o viceversa.

Lo anterior nos permitirá establecer la siguiente proposición.

Si f″ *es menor que cero en (*a, b*), entonces* f *es cóncava hacia abajo en ese intervalo. En caso de que* f″ *sea mayor que cero en (*a, b*), entonces* f *será cóncava hacia arriba en el intervalo.*

Demostración de la proposición [5-8].

Puesto que suponemos que la función f se encuentra por encima de la recta y entre $x = a$ y $x = b$ se encuentra por debajo de $f(x)$, la función F es de la forma $F(x) = y - f(x)$, cumpliéndose que $f(x) > y$. Con esto último se pretende demostrar que: $y - f(x) < 0$; véase Figura 5.28.

Siendo la ecuación de la recta: $y = f(a) + \dfrac{f(b) - f(a)}{x - a}(x - a)$, al hacer la diferencia entre $f(x)$ e y, se tiene la relación ya conocida:

$$y - f(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) - f(x) \quad (1)$$

Aplicando el teorema del valor medio [5-7] como:

$$y - f(x) = \underbrace{-(f(x) - f(a))}_{-f'(e)(x-a)} + \underbrace{\frac{f(b) - f(a)}{b - a}}_{f'(c)}(x - a)$$

Suponiendo c entre a y x, así como e entre c y x, se guarda la relación:

$$0 < a < c < e < x < b \quad (2)$$

De aquí que:

$$y - f(x) = -f'(e)(x - a) + f'(c)(x - a) = [f'(c) - f'(e)](x - a)$$

Aplicando de nuevo el teorema del valor medio a esta última expresión, queda:

$$y - f(x) = f''(d)(c - e)(x - a) \quad (2)$$

Puesto que deseamos probar que $y - f(x) < 0$, ello también ocurrirá si:

$$f''(d)(c - a)(x - a) < 0 \quad (3)$$

Para probar la desigualdad (3) hagamos uso de las propiedades de las desigualdades vistas en la sección 1.4.5. El resultado de la desigualdad debe ser de signo $-$ o < 0, de hecho tenemos dos opciones; estas son:

A) Para el caso en que $x > a$: $x - a > 0$, con $e - c > 0$, y puesto que $f''(d) < 0$, queda el esquema $> \cdot > \cdot < = <$. De aquí que $y - f(x) < 0$.
B) Para cuando $x < a$, $x - a < 0$, con $c - e < 0$, para $f''(d) < 0$, es decir, $< \cdot < \cdot < = <$. Luego $y - f(x) < 0$.

A y B muestran que la curva está situada por encima de la recta secante y, cualquiera que sean c, d, e y x en (a, b), lo cual significa que la curva es cóncava hacia abajo.

La concavidad hacia arriba se demuestra de manera semejante.

De los argumentos vistos anteriormente, podemos establecer la *condición suficiente* para la existencia de un punto de inflexión, como:

Si $f''(a) = 0$ *o* $f''(a)$ *no existe, y la derivada* $f''(x)$ *cambia de signo al pasar por el valor* $x = a$*, entonces, el punto de la curva en* $x = a$ *es un punto de inflexión.*

[5-9]

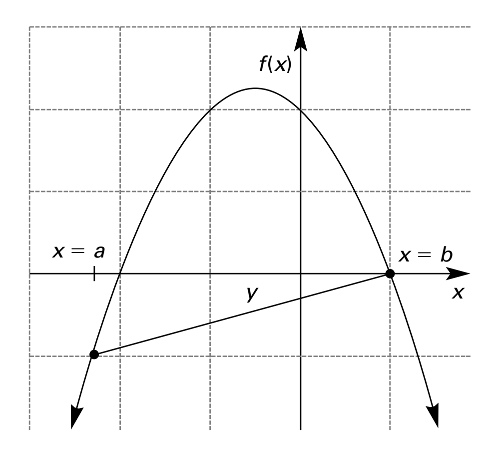


FIGURA 5.28. En la gráfica, $f(x) > y$.

La demostración de la proposición [5-9] se realiza por *reducción al absurdo*, de la siguiente manera:

Siendo $f'' < 0$ para $x < a$, y para $x > a$. Entonces en $x < a$ la curva es cóncava hacia abajo, y para $x > a$ cóncava hacia arriba. Por tanto en $x = a$, f tiene un punto de inflexión, siendo en este punto $f''(a) = 0$.

Finalmente, asumiremos un criterio que resume la proposición [5-9], el cual nos permitirá un uso práctico de la misma; la demostración que aparece en la sección 6.3.1 al final del Capítulo 6, es la siguiente:

Si $f''(a) = 0$*,* $x = a$ *es un punto crítico de la segunda derivada. Este será punto de inflexión si al sustituirlo en la última derivada impar, que no sea nula, el resultado es distinto de cero:* $f'''(a) \neq 0$ *o* $f^{v}(0) \neq 0$ *o, etc.*

[5-10]

El criterio es válido para cualquier función continua, y acciona de inmediato en expresiones de grado impar aisladas, como por ejemplo $y = x^7 - 1$, $y = 8x^9 + 10$. Para polinomios que involucran diversos grados y otro tipo de funciones trascendentes, es suficiente mostrar que la tercera derivada no se anula al sustituir el valor crítico candidato a punto de inflexión, para que este último efectivamente lo sea.

EJEMPLO 1

Verifique la existencia de puntos de inflexión en la curva $y = x^5$.

SOLUCIÓN:

Las derivadas sucesivas hasta la última derivada impar no nula son:

$$y' = 7x^6,\ y'' = 42x^5,\ y''' = 210x^4,\ y^{iv} = 840x^3,\ y^{v} = 2.520x^2,$$
$$y^{vi} = 5.040x,\ y^{vii} = 5.040,\ y^{viii} = 0,\ \text{etc.}$$

Al igualar con cero la segunda derivada obtenemos el punto crítico $42x^5 = 0 \rightarrow x = 0$. Sustituyendo este valor en la última derivada impar no nula, es decir $y^{vii}(0) = 5.040 \neq 0$, ello asegura que en $x = 0$ la función tenga un punto de inflexión.

Esto se puede revisar dando valores antes y después de $x = 0$ a la segunda derivada (véase proposición [5-9]), para observar que efectivamente haya cambio de signo. Por ejemplo $y''(-0,1) = -0,00042$ e $y''(0,1) = 0,00042$.

EJEMPLO 2

Verifique si la función $y = x^5 - 6x^4 + 10x^3 - 11x + 6$, cuenta con puntos de inflexión.

SOLUCIÓN:

Siendo las primeras tres derivadas de la función:

$$y' = 5x^4 - 24x^3 + 60x^2 - 11,\ \ y'' = 20x^3 - 72x^2 + 60x,$$
$$y''' = 60x^2 - 142x + 60$$

Igualando con cero la segunda derivada, obtenemos:

$$x(20x^2 - 72x + 60) = 0 \rightarrow x = 0,\ \ 20x^2 - 72x + 60 = 0$$

Usando la fórmula general en la segunda expresión, quedan los valores críticos:

$$x = 0,\ x = 1,32,\ x = 2,27$$

Sustituyendo en la tercera derivada cada uno de estos:

$$y'''(0) = 60 \neq 0,\ \ y'''(1,32) = -22,896 \neq 0,\ \ y'''(2,27) = 46,83 \neq 0$$

Como puede verse en los tres casos la evaluación en la tercera derivada resulta distinta de cero, lo que nos da para concluir que: $x = 0$, $x = 1{,}32$, $x = 2{,}27$, son puntos de inflexión de la función, lo cual hace innecesaria la proposición [5-9].

La gráfica correspondiente aparece en la Figura 5.29.

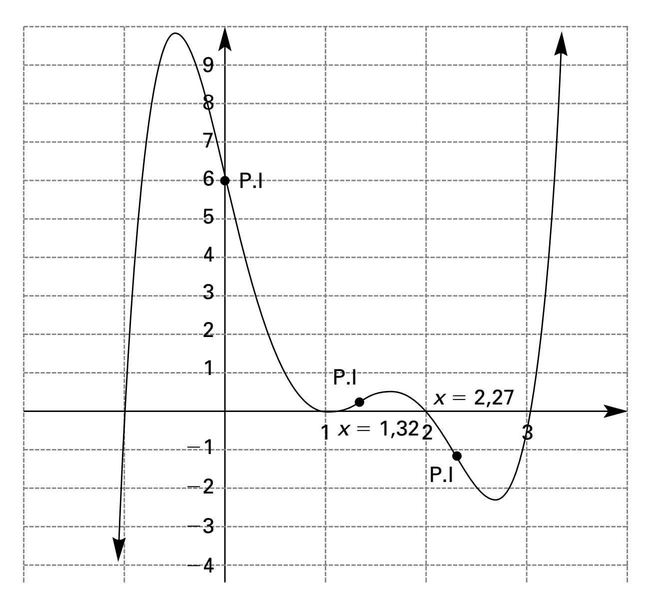


FIGURA 5.29. Puntos de inflexión en $x = 0$, $x = 1{,}32$ y $x = 2{,}27$ para $y = x^5 - 6x^4 + 10x^3 - 11x + 6$.

5.5.5. ANÁLISIS DE LA VARIACIÓN DE FUNCIONES USANDO LOS CRITERIOS DE LAS TRES PRIMERAS DERIVADAS

Intentaremos con los siguientes ejercicios abarcar la totalidad de ideas y proposiciones que en este capítulo y los anteriores hemos visto alrededor de la graficación de funciones.

EJEMPLO 1

Analizar la variación de la función $f(x) = \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{2}x^2$, haciendo uso de los criterios de las primeras tres derivadas vistos anteriormente; al final diseñar la gráfica correspondiente.

SOLUCIÓN:

Utilicemos los siguientes pasos de trabajo:

1. Las derivadas consecutivas de la función son las siguientes:

$$f'(x) = x^4 - x,\ f''(x) = 4x^3 - 1,\ f'''(x) = 12x$$

2. Igualando con cero la primer derivada, se tiene: $f'(x) = 0 \rightarrow x^4 - x = 0$, con $x(x^3 - 1) = 0$, siendo los valores críticos $x_1 = 0$ y $x_2 = 1$. Sustituyendo estos últimos en la segunda derivada:

$$f''(0) = 4(0)^3 - 1 = -1 < 0$$

De aquí que en $x = 0$ f cuenta con un mínimo. Para $x = 1$, $f''(1) = 3 > 0$.
Luego en $x = 1$ la función f tiene un máximo.
Las coordenadas correspondientes a los valores máximo y mínimo, son:

$$\text{Para } x = 0,\ y = f(0) = 0$$

$$\text{Para } x = 1,\ y = -\frac{3}{10}$$

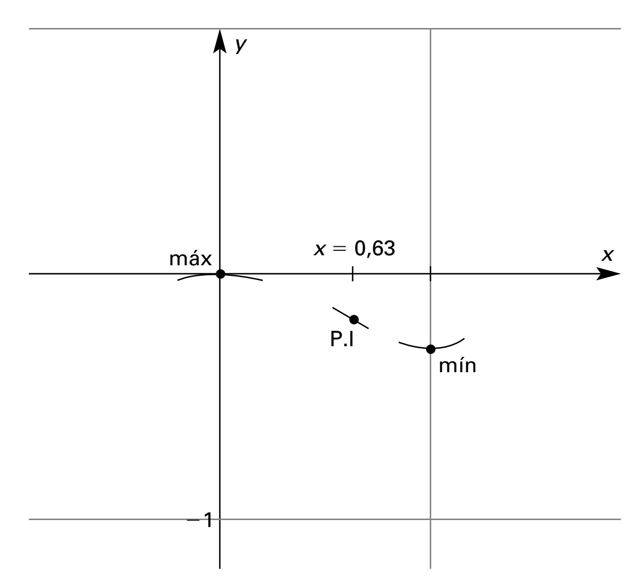


Figura 5.30. Los segmentos de curva se determinaron a partir del máximo, mínimo y P.I.; estos simulan la gráfica buscada.

3. Igualando a cero la segunda derivada:

$$f''(x) = 0 \rightarrow 4x^3 - 1 = 0,\ x = \frac{1}{\sqrt[3]{4}} = 0{,}63$$

De aquí que $x = 0{,}63$ es un valor crítico de la segunda derivada, candidato a ser punto de inflexión. Sustituyendo este último en la tercera derivada, véase la proposición [5-10]:

$$f'''(0{,}63) = 12(0{,}63) = 7{,}56 \neq 0$$

Luego, en $x = 0{,}63$ la función cuenta con un punto de inflexión que en la gráfica de la Figura 5.29 se aprecia como , aun cuando puede tomar la forma invertida viéndose así , lo cual depende de la función. Las coordenadas del punto de inflexión, son:

$$x = 0{,}63,\ y = f(0{,}63) = \frac{1}{5}(0{,}63)^5 - \frac{1}{2}(0{,}63)^2 = -0{,}18$$

El bosquejo de la gráfica, hasta estos valores, puede verse en la Figura 5.30. Aquí aparecen pequeños *trazos* que indican el máximo como ⌒, en tanto que el mínimo se ve como ⌣.

Puesto que la función es continua en todo su dominio, siendo este todos los reales, se puede bosquejar la gráfica completa, siendo suficiente para ello la información hasta aquí lograda; véase la Figura 5.31.

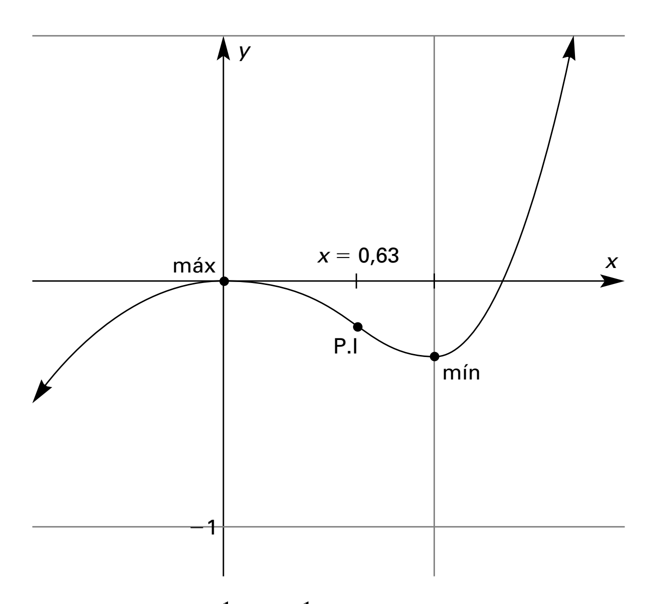


FIGURA 5.31. Gráfica de $f(x) = \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{2}x^2$, determinada con el criterio de las tres primeras derivadas.

4. Un somero análisis de la gráfica es el siguiente:

   a) La función tiene por campo de existencia y contradominio todos los reales.
   b) Crece en los intervalos de x: $(-\infty, 0)$ y $(1, \infty)$, de manera que en estos $f' > 0$. Decrece en x: $(0, 1)$, donde $f' < 0$.
   c) Cuenta con un máximo en $(0, 0)$, un mínimo en $(1, -0{,}3)$ y un punto de inflexión en $(0{,}63, -0{,}18)$
   d) Es cóncava hacia abajo en el intervalo x: $(-\infty, 0{,}63)$, de modo que en este $f'' < 0$; cóncava hacia arriba en x: $(0{,}63, \infty)$ para $f'' > 0$.
   e) Interseca al eje x en $x = 0$ y en $x = 1{,}36$.

EJEMPLO 2

Use los criterios de las primeras tres derivadas para hacer un análisis y graficar la función $y = \dfrac{x}{\sqrt{x-1}}$.

SOLUCIÓN:

1. Las primeras tres derivadas de la función son las siguientes:

$$y' = \frac{x-2}{2\sqrt{(x-1)^3}},\ y'' = \frac{-x+4}{\sqrt{(x-1)^5}},\ y''' = \frac{-\frac{7}{2}x-9}{\sqrt{(x-1)^7}}$$

2. Igualando a cero la primera derivada:

   a) $y' = 0$ para el numerador, $x - 2 = 0$, es decir $x = 2$, es el único punto crítico que arroja y' en el numerador. Sustituyéndole en la segunda derivada: $y''(2) = \frac{2}{1} > 0$, ello indica que en $x = 2$ la función tiene un mínimo.
   Las coordenadas del mínimo son: $x = 2$, $y = 2$.

   b) $y' = 0$ para el denominador $\sqrt{x-1} \neq 0$, o bien: $x - 1 \neq 0$, de modo que $x \neq 1$, este último es punto crítico de la primera derivada, al sustituirle en la segunda derivada, esta queda como: $y''(1) = \frac{3}{0}$, de lo cual se deduce que en $x = 1$ la función tiene una asíntota vertical, lo cual incluso es sugerido por la función original. Aplicando un límite cercano a la asíntota por la derecha de uno, es decir $\lim\limits_{x \to 1^+} \frac{1{,}00001}{\sqrt{1{,}00001 - 1}} = \lim\limits_{x \to 1^+} \frac{1{,}0001}{0{,}0031} = 322$, ello indica que la función *se va* al infinito. ¿Por qué razón no aplicamos un límite antes de uno? En esta parte aparecen las ramas plegándose a la asíntota; en la figura 5-32 esto se aprecia con pequeños trazos como |\ mostrándose un avance de la gráfica.

3. Igualando con cero la segunda derivada: $y'' = 0 \to x = 4$, siendo este un valor crítico, al sustituirlo en la tercera derivada se obtiene:

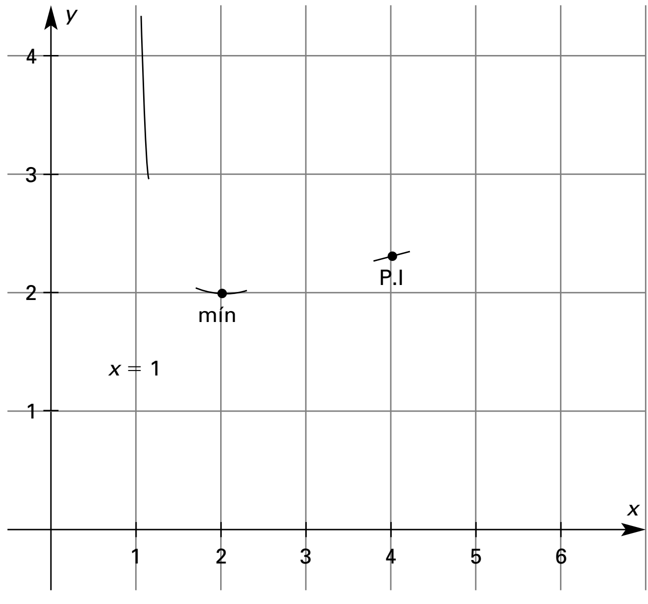


FIGURA 5.32. Segmentos iniciales que simulan la gráfica.

$$y'''(4) = \frac{-\frac{7}{2}(4) - 9}{\sqrt{(4-1)^{\frac{7}{2}}}} = -0{,}49 \neq 0$$

Por tanto en $x = 4$ la función tiene un punto de inflexión, siendo las coordenadas de este último: $x = 4$, $y = 2{,}31$.

4. Lo anterior deja la impresión de que posterior al punto de inflexión debiera haber un valor máximo, no obstante, el análisis variacional con las derivadas no arroja ningún otro valor posible, incluso, si aplicamos

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x}{\sqrt{x-1}} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{x}{x}}{\sqrt{\frac{x}{x^2} - \frac{1}{x^2}}} = \frac{1}{0}$$

ello es indicio de que la gráfica se va hacia el infinito. El conjunto de la gráfica se puede ver en la Figura 5.33.

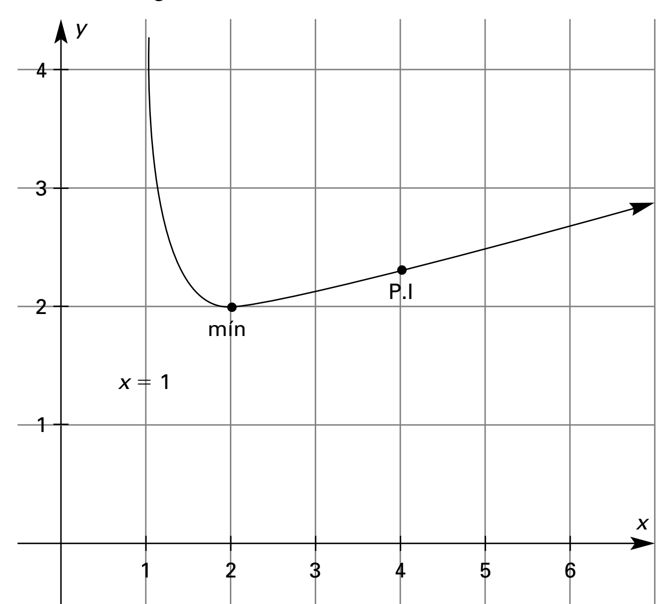


FIGURA 5.33. Gráfica de $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x-1}}$.

5. Un breve análisis de la función es el siguiente:

   a) El dominio son toda $x \geq 1$, en tanto el campo de variación se encuentra en el intervalo y: $[2, \infty]$.
   b) La función tiene un mínimo en $(2, 2)$ y un punto de inflexión en $(4, 2{,}31)$.
   c) f decrece en x: $(1, 2]$, por tanto $f' < 0$; crece en $[2, \infty]$ donde $f' > 0$.
   d) La función es cóncava hacia arriba ◡ en $(1, 4)$, y cóncava hacia abajo ⌒ en $(4, \infty)$.
   e) Está acotada para $y \geq 2$.

EJEMPLO 3

Graficar y hacer un análisis de la función $y = \frac{x^2}{a - x}$ para $a > 0$, haciendo uso del criterio de las tres primeras derivadas y, si es preciso, aplicar límites.

SOLUCIÓN:

1. Las tres primeras derivadas de la función aparecen enseguida:

$$y' = \frac{2ax - x^2}{(a - x)^2},\ y'' = \frac{2a^2}{(a - x)^3},\ y''' = \frac{6a^2}{(a - x)^4}$$

2. Hagamos $y' = 0$:

   a) Igualando con cero el numerador de la primera derivada:

   $$2ax - x^2 = 0 \rightarrow x(2a - x) = 0,\ x_1 = 0 \text{ y } x_2 = 2a$$

   Luego se tienen dos puntos críticos x_1 y x_2, sustituyéndolos en la segunda derivada, queda: $y''(0) = \frac{2a^2}{a^3} = \frac{2}{a} > 0$, por tanto en $x = 0$ la función tiene un mínimo. Para $y''(2a) = \frac{2a^2}{(a - 2a)^3} = \frac{2a^2}{-a} = -2a < 0$, de ello se deduce que en $x = 2a$ la función tiene un máximo. Siendo las coordenadas correspondientes $x = 0$, $y = 0$, para el máximo, y $x = 2a$, $y = -a$, para el mínimo.

   b) Haciendo diferente de cero el denominador de la primera derivada:

   $$(a - x)^2 \neq 0 \rightarrow a - x \neq 0, \text{ es decir: } x \neq a$$

   Este último es punto crítico, al ser sustituido en la segunda derivada, ella se indetermina como: $y''(a) = \frac{2a^2}{(a - 2a)^3} \frac{2a}{0}$, lo cual es indicio que la gráfica se va en ese valor a infinito o menos infinito, es decir, en $x = a$ la función cuenta con una asíntota vertical de la forma $|\backslash$, lo que se aprecia, incluso, en la función misma.

3. Igualando con cero la segunda derivada, queda:

$$\frac{2a^2}{(a - x)^3} = 0, \text{ o bien } 2a^2 = 0$$

   El resultado deja ver una indeterminación que se debe tomar como un indicio de la NO existencia de puntos de inflexión.

4. Los límites laterales cercanos a $x = a$, muestran hacia donde *se van* las ramas de la gráfica; véase Figura 5.34:

$$\lim_{x \to a^-} \frac{x^2}{a - x} = \infty,\ \frac{x^2}{a - x} = -\infty$$

   Puesto que el grado de la función del numerador es mayor que el grado de la función del denominador, al hacer la división $-x + a\overline{)x^2}$, como:

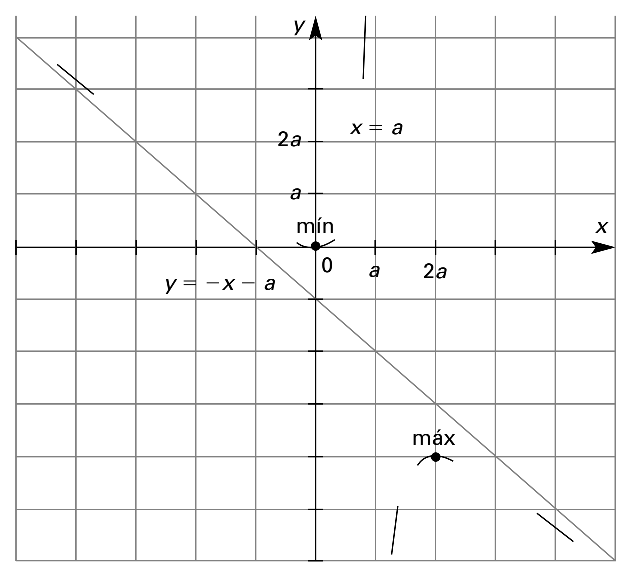


FIGURA 5.34. Segmentos de la gráfica establecidos a partir de los valores máximo, mínimo y asíntotas.

$$\begin{array}{r|l} & -x - a \\ \hline -x + a & x^2 \\ & x^2 + ax \\ & \underline{-x^2 - ax + a^2} \\ & \qquad\qquad a^2 \end{array}$$

el cociente $-x - a$, manifiesta la existencia de una asíntota oblicua de la forma $y = -x - a$ (véase sección 3.7.6). El trazo breve se dispone como: ⑊. El avance de la gráfica con estos valores se muestra en la Figura 5.34.

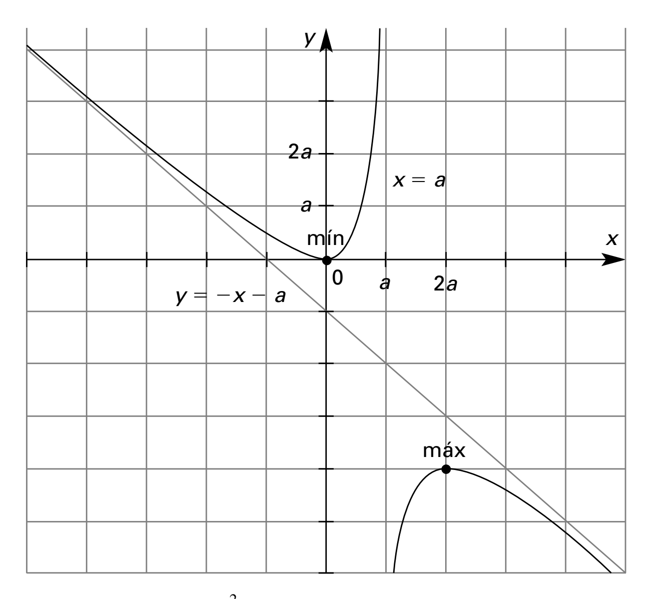


FIGURA 5.35. Gráfica de $y = \dfrac{x^2}{a - x}$ a partir del criterio de las tres primeras derivadas.

La Figura 5.35 muestra la gráfica final de la función $y = \dfrac{x^2}{a - x}$.

Un análisis de la gráfica es el siguiente:

a) Su campo de existencia son todos los reales a excepción de $x = a$. El campo de variación aparece en el intervalo x: $(\infty, 0)$ y $(-a, -\infty)$.
b) La función decrece en x: $(-\infty, 0)$ y x: $(2a, \infty)$, luego $f' < 0$. Crece en x: $(0, a)$ y x: $(a, 2a)$ donde $f' > 0$.
c) Cuenta con un mínimo en $x = 0$, $y = 0$, un máximo en $x = a$, $y = -a$, no tiene puntos de inflexión.
d) Tiene una asíntota en $x = a$, se va por las ordenadas al infinito antes de a y a menos infinito después de a. No cuenta con asíntotas horizontales. Tiene una asíntota oblicua en $y = -x - a$.
e) La función es simétrica respecto a la recta $y = -x - a$.
f) Es cóncava hacia arriba $\smile$ en $(-\infty, a)$, de modo que $f'' > 0$ en ese intervalo; cóncava hacia abajo $\frown$ en (a, ∞) donde $f'' > 0$.
g) La función es acotada para $y \geq 0$ e $y \leq -a$.

EJEMPLO 4

Haciendo uso del criterio de las tres primeras derivadas, graficar y analizar la función $y = xe^{-x}$.

SOLUCIÓN:

1. Las tres primeras derivadas son:

$$y' = (1 - x)e^{-x} \rightarrow y' = \frac{(1 - x)}{e^x}, \quad y'' = \frac{-2 + x}{e^x}, \quad y''' = \frac{3 - x}{e^x}$$

2. Igualando a cero la primera derivada, se tiene:

a) Para el numerador el valor crítico es: $1 - x = 0$, $x = 1$, al sustituirlo en la segunda derivada, obtenemos: $y''(1) = \dfrac{1}{e} = 0{,}37 > 0$, luego en $x = 1$ la función cuenta con un máximo.
b) Busquemos los valores que hacen diferente de cero el denominador, es decir: $e^x \neq 0$. No obstante, la expresión e^x no se anula para ningún valor de x, de aquí que la función NO cuenta con asíntotas verticales, lo cual se evidencia desde la función misma.
c) Verifiquemos si la función cuenta con asíntotas oblicuas u horizontales, hagamos: $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x}{e^x}$. Al aplicar el límite tanto en el numerador como en el denominador la función deviene a la indeterminación $\dfrac{\infty}{\infty}$. No obstante, si usamos la regla de L'Hôpital a la expresión, el límite queda como: $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1}{e^x} = 0$. Esto último muestra que la gráfica de la función tiene una asíntota horizontal cuya ecuación es $y = 0$.
d) Antes de cero y para valores muy grandes de x:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x}{e^x} = \lim_{x \to -\infty} (-x)e^x = -\infty$$

3. Igualando a cero la segunda derivada, queda: $y'' = 0 \rightarrow -2 + x = 0$, o sea $x = 2$, punto crítico que al ser sustituido en la tercera derivada arroja $y'''(2) = = \frac{1}{e^2} = 0{,}13 \neq 0$. Esto indica que en $x = 2$ la función tiene un punto de inflexión, siendo la ordenada respectiva $y = \frac{2}{e^2} = 0{,}27$.

   La gráfica de la función aparece en la Figura 5.36.

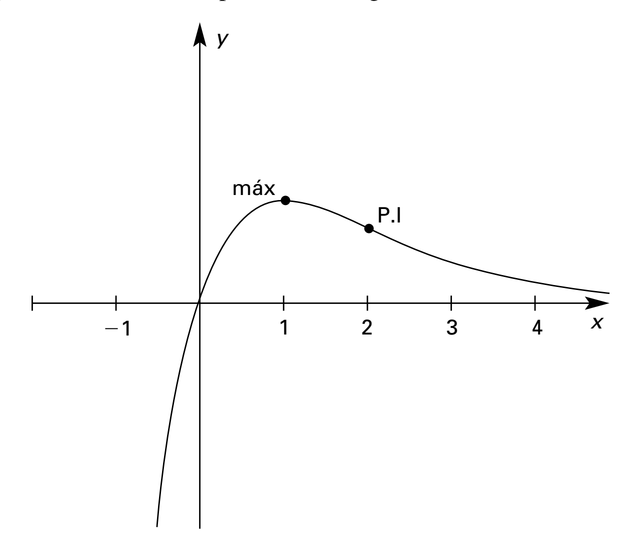


FIGURA 5.36. Gráfica amortiguada de $y = xl^{-x}$ a partir de usar el criterio de las tres primeras derivadas

4. Análisis de la función:

   a) El dominio de la función son todos los reales, siendo el campo de variación el intervalo y: $(2, -\infty)$.
   b) La función crece en x: $(-\infty, 1)$, para $y' > 0$, decrece en $(1, \infty)$, donde $y' < 0$.
   c) Tiene un máximo en $\left(1, \frac{1}{e}\right)$, punto de inflexión en (2, 0,27).
   d) Cuenta con una asíntota horizontal en $y = 0$.
   e) Es cóncava hacia arriba ◡ en x: $(2, \infty)$, cóncava hacia abajo ◠ en x: $(-\infty, 2)$.

5. La función está acotada para $y \leq 0{,}37$.

EJEMPLO 5

Use el criterio de las tres primeras derivadas para analizar y graficar la función $y = x + \text{sen}\, x$, cuyo dominio se encuentra en $[-2\pi, 2\pi]$.

SOLUCIÓN:

1. Las tres primeras derivadas aparecen enseguida:

$$y' = 1 + \cos x,\ \ y'' = -\text{sen}\, x,\ \ y''' = -\cos x$$

2. Igualando a cero la primera derivada: $y' = 0 \rightarrow 1 + \cos x = 0$:

$$\cos x = -1 \rightarrow \arccos(\cos x) = \arccos(-1) \rightarrow x = \arccos(-1) = \pi$$

Luego los puntos críticos se colocan en: $x = \pi n$, para n entero impar.
Sustituyendo los puntos críticos en la segunda derivada, se tiene:

$$y''(\pi) = -\text{sen}(\pi) = 0$$

Puesto que la evaluación del valor crítico resulta cero, esto es indicio para afirmar que la función no cuenta con máximos y mínimos, incluso, sugiere puntos de inflexión para ese valor.

3. Igualando a cero la segunda derivada: $y'' = 0 \rightarrow -\text{sen}\, x = 0$, $\arcsin(\text{sen}\, x) = \arcsin(0) \rightarrow x = \arcsin(0) = \pi n$, para n entero, de aquí que los valores críticos de la segunda de derivada se encuentren en $x = \pi n$.
Sustituyendo estos en la tercera derivada, queda:

$$y'''(\pi) = -\cos(\pi) = 1 \neq 0$$

Esto deja ver que la gráfica de la función tiene puntos de inflexión en $(-2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi)$. Véase la gráfica en la Figura 5.37.

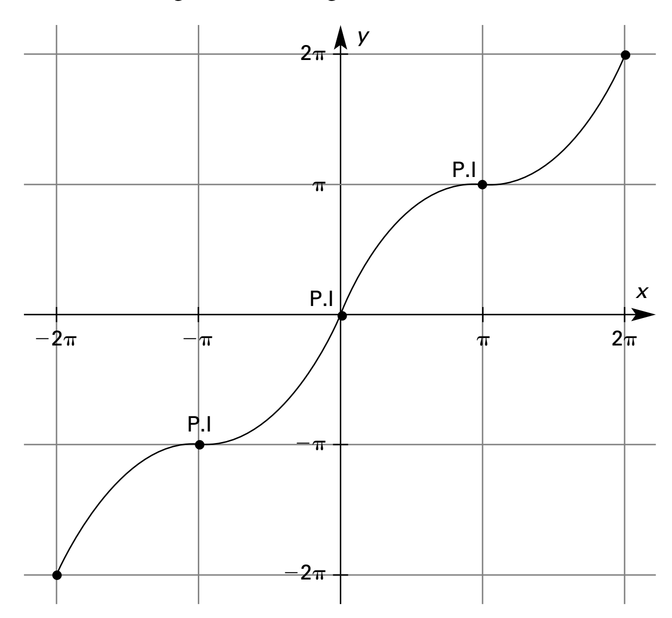


FIGURA 5.37. Gráfica de $y = x + \text{sen}\, x$ en $[-2\pi, 2\pi]$.

4. Análisis de la función:

a) Siendo la función $y = x + \text{sen}\, x$, su dominio se encuentra en x: $[-2\pi, 2\pi]$, el campo de variación en y: $[-2\pi, 2\pi]$.
b) La función es creciente en todo su dominio, luego $y' > 0$.
c) Diremos que tiene un valor *mínimo local* en $(-2\pi, -2\pi)$ y un *máximo local* en $[2\pi, 2\pi]$, puesto que son los valores extremos del dominio, así como puntos de inflexión en $[-\pi, \pi]$, $(0, 0)$ y $[\pi, \pi]$.
d) Es cóncava hacia abajo ⌒ en x: $(-2\pi, -\pi)$ y $(0, \pi)$, donde $y'' < 0$, cóncava hacia arriba ⌣ en x: $(-\pi, 0)$ y $(\pi, 2\pi)$ donde $y'' > 0$.

e) La función es impar, $y(-x) = -(x + \text{sen } x)$, por tanto simétrica respecto al origen.
f) Las pendientes de las rectas tangentes en los puntos de inflexión son horizontales, es decir $y' = 0$ en cada caso.
g) Es acotada para $y \geq -2\pi$ e $y \leq 2\pi$.

5.5.5.1. Valores críticos que se reducen al infinito

Existen funciones para las cuales las derivadas primera y segunda se indeterminan en el denominador, siendo que a la función original no le ocurre, llevando así a la gráfica a tener en esos valores tangentes verticales. Obsérvese por ejemplo que la función $y = \sqrt[3]{x^2}$ tiene por dominio todos los reales, no obstante su derivada $\dfrac{2}{3\sqrt{x}}$, se indetermina para $x = 0$, puesto que resulta de la forma: $\dfrac{2}{0}$, de aquí que la gráfica tenga en ese valor una tangente vertical; véase la Figura 5.38. Lo interesante de estos casos es que las ramas de la gráfica concurren al punto donde la primera derivada se indetermina, a pesar de que la concavidad de la gráfica no cambia.

Esto último tiene consecuencias para la gráfica de funciones que se combinen con funciones de este tipo, las cuales arrojan formas geométricas, singularidades como son *crestas* o *picos*, que dependen del tipo de función, como se podrá apreciar en los siguientes ejemplos.

En otros casos de funciones donde las derivadas primera y segunda se indeterminan, aparecen *puntos de inflexión tangencial* por los cuales la gráfica cambia de concavidad; debido a ello también se conocen como *puntos de inversión*, como por ejemplo para la función $y = \sqrt[3]{x + 1}$, continua en su dominio; véase Figura 5.39, a cuya gráfica hemos hecho dos ampliaciones o cambios de escala, alrededor del punto $x = -1$.

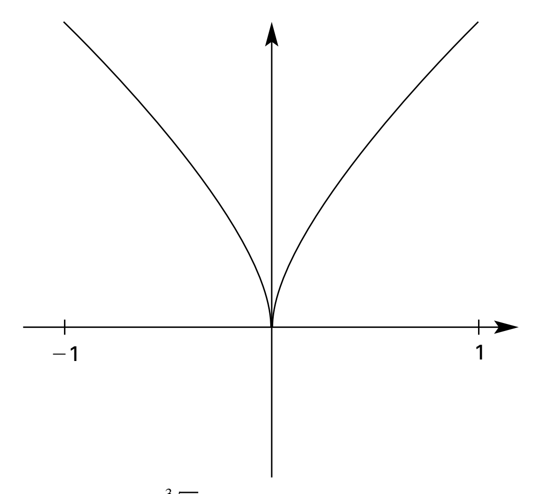


FIGURA 5.38. La función de $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$, cuya gráfica se muestra, cuenta con una tangente vertical en $x = 0$.

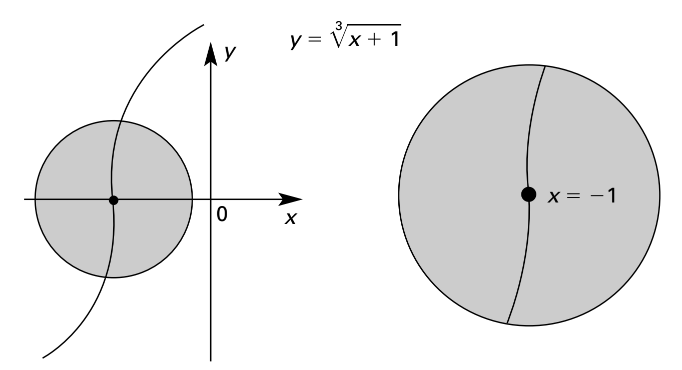


FIGURA 5.39. Punto de inflexión vertical.

En ese punto las derivadas consecutivas de la función se indeterminan en $x = -1$, siendo:

$$y' = \frac{1}{3\sqrt[3]{(x+1)^2}}$$

$$y'' = \frac{-2}{9\sqrt[3]{(x+1)^5}}$$

Las gráficas acentúan el entorno tangencial por el que se *mueven los puntos* de la curva al pasar por $x = -1$. Si obtenemos las pendientes de las rectas tangentes para valores muy cercanos a la zona tangencial, estas crecen exageradamente; por ejemplo, para valores como $x = 0{,}9999999999$ la pendiente de la recta tangente es $y' = 718{,}14$, lo cual deja ver la *verticalidad* de la región por la que se mueve los valores de x o puntos en esa zona, dando lugar a cambios en la concavidad de la gráfica, antes y después del punto tangencial.

Puesto que la indeterminación no se hereda de la función original, sino que aparece en las derivadas, es obvio que la función NO cuenta con asíntotas verticales, presentándose en su lugar la singularidad de la inflexión tangencial. El proceso para verificar la existencia de estos valores, hace preciso igualar a cero el denominador de la primera derivada para reconocer la indeterminación; después de esto se aplica la proposición [5-9] para verificar el cambio de concavidad, antes y después del punto en cuestión.

Estableceremos algunas ideas al respecto en los dos ejemplos que planteamos enseguida.

EJEMPLO 1

Use el criterio de las tres primeras derivadas para analizar y graficar la función $y = (x - 1)\sqrt[3]{x^2}$.

SOLUCIÓN:

1. Las tres primeras derivadas son:

$$y' = \frac{5x - 2}{\sqrt[3]{x^2}}, \quad y'' = \frac{10x + 2}{9\sqrt[3]{x^4}}, \quad y''' = \frac{-10x - 8}{27\sqrt[3]{x^7}}$$

2. Igualando a cero la primera, resulta:

   a) Para el numerador, $5x - 2 = 0$, siendo punto crítico candidato a máximo o mínimo, el valor $x = \frac{2}{5} = 0{,}4$, sustituyéndolo en la segunda derivada, queda:

   $$y''(0{,}4) = \frac{10(0{,}4) + 2}{9(0{,}4)^{\frac{4}{3}}} = 2{,}26 > 0$$

   luego en la función tiene un mínimo. Siendo la ordenada correspondiente $y = -0{,}326$.

   b) Haciendo diferente de cero el denominador $x^{\frac{2}{3}} \neq 0$, o bien $x \neq 0$, ello sugiere que la función debe contar con una asíntota en ese valor. Sin embargo, esto último no se aprecia en la función original, puesto que no tiene valores de x que lo indeterminen, tampoco es un punto tangencial puesto que para dos valores, anterior y posterior a cero, la segunda derivada no cambia de signo: $y''(-0{,}1) = 2{,}39$, $y''(0{,}1) = 7{,}18$. Consecuentemente diremos que en $x = 0$ la función *se reduce al infinito*; geométricamente la combinación de funciones nos dará un «pico» de la forma ⁄⁀\; ello se debe a que la primera derivada de la función en este punto NO existe. Con algunas reservas, la cresta en sí misma puede considerarse un máximo de la función, puesto que, incluso, surge de igualar a cero el denominador de la primera derivada.

3. Igualando a cero la segunda derivada, queda: $10x + 2 = 0 \rightarrow x = -\frac{1}{5}$, valor crítico que al ser sustituido en la tercera derivada produce: $y'''\left(-\frac{1}{5}\right) = 9{,}5 \neq 0$, de aquí que la función tenga un punto de inflexión común en $x = -\frac{1}{5}$, siendo la ordenada $y = -0{,}4$.
4. Puesto que la función es continua en todo su dominio, la gráfica se puede bosquejar sin necesidad de más argumentos, esta aparece en la Figura 5.40.
5. El análisis de la función es el siguiente:

   a) El campo de existencia y campo de variación de la función son todos los reales.
   b) La función crece en x: $(-\infty, 0)$ y x: $(0{,}4, \infty)$, en estos intervalos $y' > 0$, a excepción de $x = 0$, decrece para $(0, 0{,}4)$, donde $y' < 0$, a excepción de $x = 0$.
   c) Tiene un mínimo en $(0{,}4, 0{,}326)$, máximo o pico en $(0, 0)$ y un punto de inflexión en $\left(-\frac{1}{5}, -0{,}4\right)$.

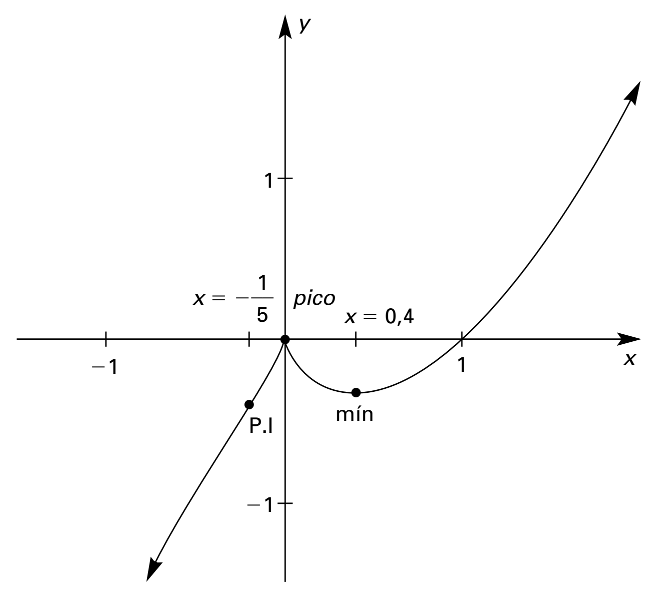


FIGURA 5.40. En $x = 0$, la función $f(x) = (x - 1)\sqrt[3]{x^2}$ se «reduce al infinito».

d) La función es cóncava hacia abajo ⌒ en el intervalo x: $\left(-\infty, -\frac{1}{5}\right)$, siendo en este $y'' < 0$, cóncava hacia arriba ⌣ en x: $\left(-\frac{1}{5}, 0\right)$ y x: $(0, \infty)$, donde $y'' > 0$.

EJEMPLO 2

Usando el criterio de las tres primeras derivadas, determine la gráfica y haga un análisis de la función $y = \sqrt[3]{\dfrac{1 + x}{1 - x}}$.

SOLUCIÓN:

1. Las primeras tres derivadas aparecen enseguida:

$$y' = \frac{2}{3(1 + x)^{\frac{2}{3}}(1 - x)^{\frac{4}{3}}}, \quad y'' = \frac{4(1 + 3x)}{9(1 + x)^{\frac{5}{3}}(1 - x)^{\frac{7}{3}}},$$

$$y''' = \frac{4(27x^2 + 18x + 11)}{27(1 + x)^{\frac{8}{3}}(1 - x)^{\frac{10}{3}}}$$

2. Igualando a cero la primera derivada, resulta:

   a) Para el numerador: $2 = 0$, indeterminación que evidencia la no existencia de máximos o mínimos.

b) Para el denominador aparece un punto crítico no consignado en la función original; este es $x = -1$, que le reduce al infinito. Antes y después de este valor la segunda derivada cambia de signo: $y''(-1{,}1) = 8{,}6$ $y''(-0{,}9) = -8{,}00$, luego en $x = -1$ la función tiene un punto tangencia 1 vertical, siendo la ordenada correspondiente $y = 0$.

3. Igualando a cero la segunda derivada, $4 + 12x = 0 \to x = -\frac{1}{3}$, valor crítico, que al ser sustituido en la tercera derivada nos da $y''(-\frac{1}{3}) = 0{,}336 \neq 0$. Lo cual deja ver que en $x = -\frac{1}{3}$ la función tiene un punto de inflexión común, siendo la ordenada $y = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} = 0{,}79$.

4. El dominio de la función son todos los reales menos el valor de $x = 1$, lo cual indica que en éste la función tiene una asíntota vertical. De aquí que: $\lim_{x \to 1^-} f(x) = \infty$, $\lim_{x \to 1^+} f(x) = -\infty$, los límites dejan ver hacia dónde se orientan las ramas de la gráfica cerca de la asíntota; además, $y = \lim_{x \to \infty} f(x) = -1$, es una asíntota horizontal de la forma $y = -1$.

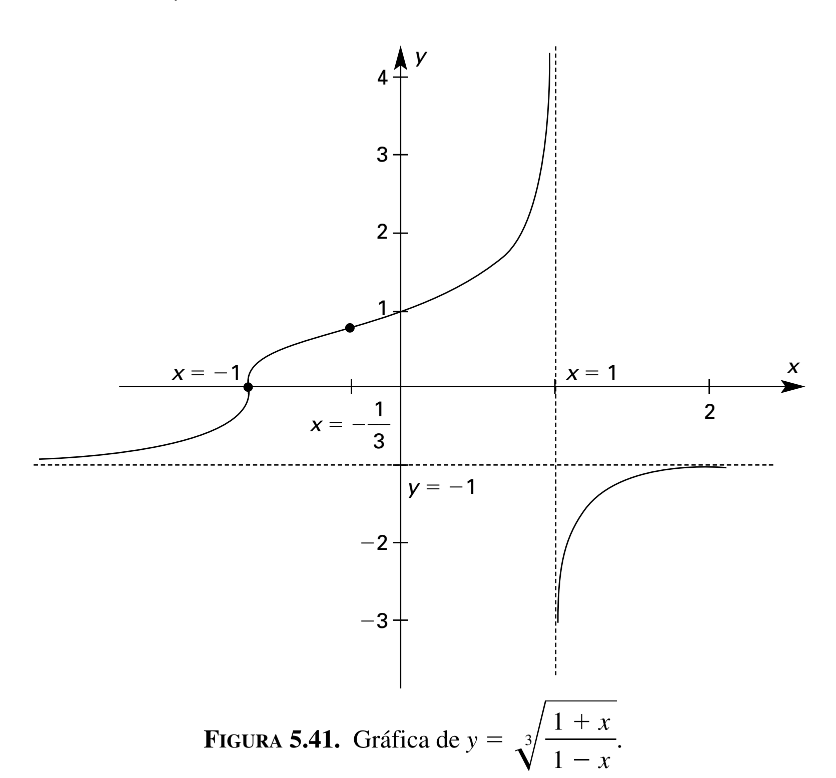


FIGURA 5.41. Gráfica de $y = \sqrt[3]{\frac{1 + x}{1 - x}}$.

5. Análisis de la función. (Ver figura 5.41)

a) El campo de definición son todos los reales menos $x = 1$, siendo el campo de variación todos los reales menos $y = -1$.
b) La función crece en todo su dominio, luego $y' > 0$, a excepción de $x = -1$ y $x = 1$.

c) No cuenta con máximos ni mínimos, punto de inflexión común en $\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)$, punto de inflexión tangencial en $(-1, 0)$.

d) Cruza al eje x en $x = -1$.

e) Cóncava hacia arriba ◡ en x: $(-\infty, -1)$ y x: $\left(-\frac{1}{3}, 1\right)$, cóncava hacia abajo ◠ en x: $\left(-1, -\frac{1}{3}\right)$ y x: $(1, \infty)$.

f) Acotada en el intervalo $-1 < y < -1$.

ACTIVIDADES Y EJERCICIOS DE LA SECCIÓN 5.5

I. Dadas las siguientes funciones, encuentre los intervalos para los cuales cumplen con el teorema de Rolle, determinando los valores donde se encuentran los máximos y mínimos.

1. $y = x^2 - 5x + 4$

2. $y = x^3 - 3x + 2$

3. $y = x^2(x - 1)$

4. $y = -3x^4 + 2x - 1$

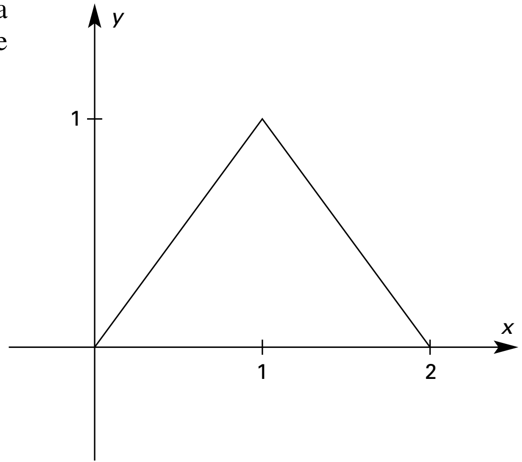
5. $y = \text{sen } x$

6. $y = x \ln x$

7. $y = -x^4 - x$

8. $y = x \text{ sen } x$

9. Aplique el teorema de Rolle a la función cuya gráfica aparece enfrente, discuta el resultado.



II. Use el teorema del valor medio en las siguientes funciones para encontrar $x = c$, de manera que la pendiente m de la recta secante entre $f(a)$ y $f(b)$ sea igual a $f'(c)$. Inicie construyendo la función auxiliar $F(x) = f(x) - y$.

10. $f(x) = 3x^2 + 5x - 2$, para $f(-2)$ y $f(1)$

11. $f(x) = x^3 + x^2 - 2x - 2$, para el tramo $f(-2)$ y $f\left(-\frac{1}{3}\right)$

12. $f(x) = (x^2 + 1)(x^2 - 4)$, para $f(-2)$ y $f(0)$

13. $f(x) = x^2e^{-x}$, para $f\left(-\frac{1}{2}\right)$ y $f(1)$.

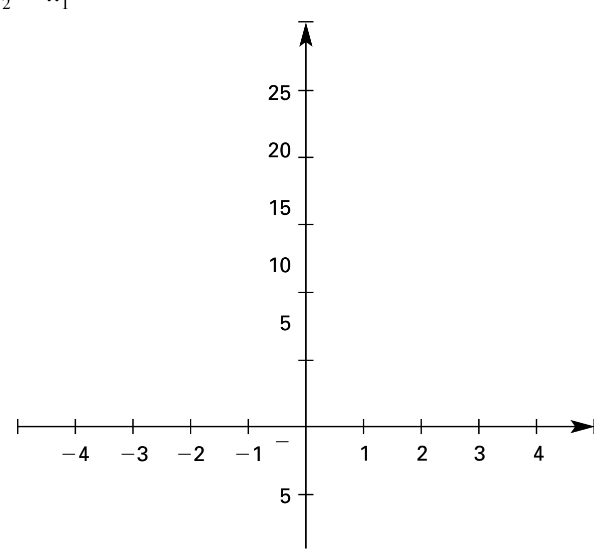
14. Muestre que la función $y = -x^4 - 1$, con $y(-2) = -15$ e $y(1) = 0$, se obtuvo rotando la función $y = -x^4 - 5x + 6$, un ángulo de: 78,69°.

15. Actividad

La siguiente serie de actividades permitirá un mejor entendimiento del teorema del valor medio; te pedimos que las desarrolles detenidamente hasta llegar a confrontar los resultados, geométrico inicial, con el resultado analítico que se piden más adelante.

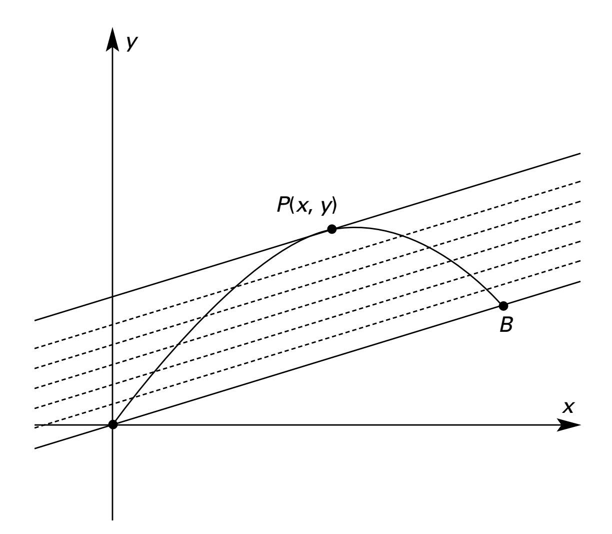
A) Usando el criterio de las tres primeras derivadas, construye la gráfica de la función $y = 2x^3 + x^2 - 13x + 6$; para ello utiliza los ejes que a diferente escala, para x e y, aparecen enseguida. Dibuja adecuadamente los valores máximos, mínimos, puntos de inflexión; identifica, además, las coordenadas donde la curva corta a los ejes.

B) Con un par de escuadras y regla graduada, traza la recta que pasa por los puntos A: $f(-3)$ y B: $f(0)$, determinando su ecuación a partir de la relación: $y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$. Con ello identifica el valor de la pendiente $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.



C) Traza *hacia arriba* rectas secantes paralelas a la recta AB (semejantes al proceso que se observa enseguida) de manera que la última recta que se dibuje sea la tangente que toca a la curva en un punto $P(x, y)$. ¿Cuál es la pendiente de la recta tangente en P (véase figura de la página siguiente)?

D) Es obvio que la pendiente de la tangente es la misma que la pendiente m de la recta secante AB. Confronta este resultado con lo que se afirma en el teorema del valor medio, es decir:



$$f'(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \left(\text{recuerda que } \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \right)$$

¿Quién es $f'(c)$ y quién $x = c$ en la gráfica? Determina con la regla graduada aproximadamente el valor de $x = c$, y anótalo. Aquí termina la parte de construcción geométrica.

E) Enseguida construye la función auxiliar $F(x) = f(x) -$ recta, es decir: $F(x) = 2x^3 + x^2 - 13x + 6 -$ (ec.recta) y desarrolla el proceso para determinar $f'(c)$. Recuerda que el proceso consiste en derivar $F(x)$ e igualar a cero $F'(x)$ para calcular los puntos críticos candidatos a ser $f'(c)$. Para el cálculo, usa la fórmula general.

F) Después de calcular $f'(c)$ confronta este último con el resultado obtenido geométricamente en el inciso D, los cuales deben ser casi iguales o iguales.

G) Puesto que $f'(c)$ es uno de los puntos críticos de la primera derivada, siendo esta una cuadrática: ¿qué significado tiene para el problema el otro punto crítico que arroja la fórmula general?

III. Construya las gráficas de las siguientes funciones haciendo uso del criterio de las primeras tres derivadas; incluya un análisis que exhiba los intervalos de crecimiento, decrecimiento, dirección de las concavidades, coordenadas de los máximos, mínimos, puntos de inflexión, etc.

16. $y = x^3 - 4x^2$

17. $y = 12x^2 - 24x^4$

18. $y = (x - 1)^2(x + 1)$

19. $y = \dfrac{x^2 - 2x + 5}{x - 3}$

20. $y = \dfrac{4 - x^4}{x}$

21. $y = \dfrac{x}{x + 1}$

22. $x^2 - \frac{2}{x}$

23. $y = \frac{2}{x^2 - 4}$

24. $y = \frac{5x^4 - 1}{x}$

25. $y = \sqrt{4 + x} + \sqrt{4 - x}$

26. $y = \sqrt{x^2 - 3}$

27. $y = (x - 2) + \sqrt[3]{(x - 1)^2}$

28. $y = \frac{9}{\sqrt{x^2 - 9}}$

29. $y = xe^x$

30. $y = x - \operatorname{sen} x$

31. $y = \cos x + \operatorname{sen} x$

32. $y = \frac{e^x}{x^2}$

33. $y = x \ln x$

34. $y = \frac{\ln x}{x}$

35. $y = e^x \operatorname{sen} x$

36. $y = x + \operatorname{arctg} x$

37. $y = \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{4}x^4$

IV. Dadas las siguientes condiciones, bosqueje la gráfica de la función correspondiente.

38. a) f es continua en $\mathbb{R}$
b) $f(0) = 0, f(1) = 2$
c) f es par
d) $f' > 0$ para $0 < x < 2$
e) $f'' > 0$ para $0 < x < 2$

39. a) $f(0) = 1, f'(0) = 0$
b) $f' > 0$ en $(-\infty, 0)$
$f' < 0$ en $(0, \infty)$
c) $f''\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0$
$f''\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = e^{-\frac{1}{2}}$
d) $f'' > 0 : \left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \infty\right)$
$f'' < 0 : \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

40. a) $f(-2) = \frac{1}{4}, f(0) = 3, f(2) = 0$
b) $f'(0) = 0, f'(2)$ no existe

c) $f'' < 0$ en $(-\infty, 2)$

d) $f = y = x - 2$ en $[2, \infty]$

41. a) $f(1) = 2, f'(1) = 0$

b) $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0, \lim_{x \to 0^-} = -\infty, \lim_{x \to 0^+} = \infty, \lim_{x \to 2^-} = \infty, \lim_{x \to 2^+} = -\infty$

V. Construya las gráficas de las siguientes funciones haciendo uso del criterio de las primeras tres derivadas, enfatice en los puntos de inflexión tangencial, si es que los hay.

42. $y = x\sqrt{x - 1}$

43. $y = \sqrt{3x - x^3}$

44. $y = 2x + 3\sqrt[3]{x^2}$

45. $y = x - \sqrt[3]{x}$

46. $y = 5x + \sqrt[3]{x}$

47. $y = 5 - 4\sqrt[3]{x^4}$

48. $y = -(x - 1)^{\frac{1}{3}}$

49. $y = \dfrac{x}{\sqrt[3]{x + 1}}$

Series y sucesiones

6



ALFONSO NÁPOLES GÁNDARA
(1897-1969)

De septiembre de 1930 a enero de 1932, en Massachusets Institute of Technology, como becario de la J. S. Guggenheim Foundation, asistió y acreditó por examen catorce cursos semestrales de Matemáticas superiores de categoría A (para graduados) no tratados en México, antes de 1932 habiendo obtenido en once de ellos la calificación H (pasado con honor). Entre ellos: *Geometría Diferencial, Cálculo Tensorial, Geometría Riemanniana, Ecuaciones Diferenciales, Series de Fourier*, de catorce que se citan. En palabras de Nápoles:

> «El hecho no parece tener importancia, pero la realidad es que causó impacto en el medio científico de México por varias circunstancias: por lo rarísimo en el México de entonces (1930) de conceder y recibir becas y, ¡cosa insólita en México!, por haberse concedido la beca para el estudio en Matemáticas, habiendo como había buen número de candidatos en humanidades y otras especialidades. El hecho llamó la atención, además, porque se trataba de las dos primeras becas que se otorgaba la Fundación Guggenheim a latinoamericanos no residentes en los EU».

Alfonso Nápoles es responsable de la existencia de tres importantes instituciones académicas: la Facultad de Ciencias, el Instituto de Matemáticas y la Sociedad Matemática Mexicana.

6.1. SERIES DE POTENCIAS

Una primera definición de serie es sugerida enseguida:

> *Una serie es una sucesión indefinida de términos que se deducen unos de otros según una determinada ley. En este caso la ley es una función* f(x)*.*

[6-1]

De acuerdo a la proposición [6-1] la expresión:

$$f(x) = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1} + a_n + \dots$$

Representa una serie que aproxima a la función partir de los términos que la integran. De cada término podemos decir que su *rango* es la posición que éste ocupa en la serie. Por lo general es el valor numérico que se coloca a cada uno, y se determina

sumando una unidad a cada subíndice. Así el término a_{n-1} ocupa el rango n en la serie.

Aquellas funciones que pueden ser desarrolladas en serie son llamadas *funciones analíticas*. Los desarrollos en serie más elementales de las funciones analíticas se pueden determinar haciendo uso de herramientas elementales, como son: una división, el teorema del binomio de Newton y otras. Por ejemplo, la función $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ puede desarrollarse haciéndose la división, como:

$$\frac{1}{1-x} = (1-x)^{-1} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n + \ldots \quad (1)$$

No obstante, se llega al mismo resultado aplicando el teorema del binomio.

Otro ejemplo es el desarrollo de la siguiente función en serie geométrica:

$$\frac{1}{(a+x)^3} = (a+x)^{-3} = \frac{1}{a^3} - \frac{3x}{a^4} + \frac{6x^2}{a^5} - \frac{10x^3}{a^6} + \ldots$$

Si en el primer caso nos detuviéramos en alguno de los términos, por ejemplo en x^2, sería necesario agregar el *residuo*, o sea, el cociente de hacer la división para completarle. En este caso el residuo sería: $\dfrac{x^3}{1-x}$. De aquí obtendríamos:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \frac{x^3}{1-x}$$

Esto último nos lleva a determinar el *residuo enésimo* R_n de la serie de la siguiente manera:

Dispongamos el caso anterior como la suma de los primeros n términos:

$$S = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n \quad (2)$$

Multipliquemos (1) por x, de modo que quede:

$$Sx = x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n + x^{n+1} \quad (3)$$

Restando las expresiones (3) de (2),queda que la suma de los n primeros términos es:

$$S = \frac{1 - x^{n+1}}{1-x} \qquad [6\text{-}2]$$

O bien:

$$S = \frac{1}{1-x} - \frac{x^{n+1}}{1-x}$$

Luego es posible escribir la serie infinita (1) a través de su residuo como:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n + \frac{x^{n+1}}{1-x} \quad (4)$$

Si enseguida damos a (4) un valor de $x = 2$ obtenemos:

$$-1 = 1 + 2 + 4 + 8 + \ldots$$

Lo cual resulta ser falso. Esto último significa que la serie *diverge* para valores distintos de $x > 1$.

Si a (4) damos ahora un valor de $x = -2$, resulta la incongruencia:

$$\frac{1}{2} = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + - \ldots$$

La serie oscila entre uno y menos uno si hacemos la suma de un número par de sumandos resulta cero; si por el contrario, se hace la suma de un número impar de estos, resulta 1. Puesto que estas sumas pasan de un valor finito a cero, y de otro a uno, sin detenerse en ningún caso, diremos que la serie es *indeterminada*.

No obstante, la serie (4) es convergente para valores menores de x entre menos uno y uno.

Si damos un valor de $x = \frac{1}{2}$ a la expresión (4) resulta la siguiente serie geométrica, desarrollada en potencias:

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} + \ldots$$

Esta última tiene por *razón de crecimiento* el valor $x = \frac{1}{2}$. Si determinamos la suma usando la expresión [6-2], resulta:

$$S = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}}$$

Para probar que efectivamente esta última converge, apliquemos a la expresión el límite $\lim\limits_{n \to \infty}$, o sea:

$$S = \lim_{n \to \infty} \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} = \lim_{n \to \infty} \frac{1 - \frac{1}{2^{n+1}}}{1 - \frac{1}{2}} = \lim_{n \to \infty} \frac{1 - \lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{2^{n+1}}}{\frac{1}{2}} = 2$$

Este resultado indica que la serie converge a la suma infinita de términos, cuyo valor es $S = 2$.

Para el caso general de la expresión [6-2], si suponemos $-1 < x < 1$, para cuando $n \to \infty$, resulta que la suma infinita de términos es la conocida regla [6-3] , serie que converge a dicha expresión: $S = \dfrac{1}{1-x}$.

O bien:

$$S = \frac{a_0}{1-r} \qquad [6\text{-}3]$$

En la cual a_0 representa el primer término de la serie y r la razón de crecimiento.

6.1.1. PRIMERA CONDICIÓN NECESARIA DE CONVERGENCIA

De lo visto anteriormente podemos dar una primera definición de convergencia en los siguientes términos:

La condición necesaria, más no suficiente, para que una serie sea convergente, es que un término cualquiera de ésta tenga por límite a cero, al crecer el número de términos sin límite.

[6-4]

Demostración:

Consideremos la suma S de la serie [6-4] como:

$$S = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} + a_n + \ldots$$

La cual por hipótesis supondremos convergente. Designemos por S_n la suma de sus n primeros términos, quedando:

$$S_n = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} \quad (1)$$

Si ahora llamamos S_{n+1} a la suma de sus $n + 1$ primeros términos, obtenemos:

$$S_{n+1} = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} + a_n \quad (2)$$

Restando (2) de (1), resulta:

$$S_{n+1} - S_n = a_n$$

Tomando límites suponiendo que el número de términos crece indefinidamente, es decir $\lim\limits_{n \to \infty}$, se tiene que:

$$\lim_{n \to \infty} (S_{n+1} - S_n) = \lim_{n \to \infty} a_n$$

No obstante, cuando n tiende a infinito, las expresiones S_{n+1} y S_n tienen por límite al valor de S, puesto que por hipótesis hicimos el supuesto de que la serie inicial es convergente. De aquí resulta que:

$$\lim_{n \to \infty} a_n = S - S = 0$$

Tal como se prevé en la proposición [6-4].

No obstante, la condición de la proposición [6-4], que asume que los términos tiendan a ser cero, no es suficiente para que la serie sea convergente.

Demostraremos esto último con un contraejemplo.

En efecto, el caso típico es el de la serie conocida como *armónica*:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots$$

Como se aprecian, los términos de esta serie decrecen indefinidamente, a pesar de que su suma es infinita, es decir, divergente.

Demostración:

Esta consiste en sumar algunos de los términos de la siguiente manera:

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} > \frac{1}{4} + \frac{1}{4}, \text{ o bien } \frac{1}{3} + \frac{1}{4} > \frac{1}{2}$$

También:

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} > \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{2}$$

Al ir formando así grupos que tengan por últimos términos:

$$\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots$$

Cada uno de estos tendrá un valor mayor que $\frac{1}{2}$, de modo que la suma de estos grupos, es decir, la suma de todos los términos, *puede ser tan grande como se desee*, por lo que la serie armónica es divergente.

Veremos un criterio definitivo para verificar la convergencia de una serie, que simplifica lo antes visto; antes de ello pasaremos a establecer con más detalle el método más importante de esta sección para desarrollar funciones en serie de potencias.

6.2. SERIE DE MACLAURIN

Supongamos que $f(x)$ es susceptible de ser desarrollada en serie de potencias, es decir $f(x)$ es función analítica. Dependiendo de la función, el desarrollo que adquiere será de la forma:

$$y = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \ldots \qquad [6\text{-}5]$$

En la cual los coeficientes A, B, C, etc., son funciones en x.

Si derivamos sucesivamente la expresión [6-5] obtenemos:

$$\frac{dy}{dx} = B + 2Cx + 3Dx^2 + \ldots$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2C + 1 \cdot 2 \cdot 3Dx + 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4Ex^2 + \ldots$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = 1 \cdot 2 \cdot 3D + 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4Ex + 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5Fx^2 + \ldots$$

Etcétera

Si para cada una de las expresiones anteriores, iniciando con [6-5], planteamos la hipótesis de $x = 0$, queda:

$$y = A,\ \frac{dy}{dx} = B,\ \frac{d^2y}{dx^2} = 2C,\ \frac{d^3y}{dx^2} = 1 \cdot 2 \cdot 3D,\ \frac{d^4y}{dx^4} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4E, \text{ etc.}$$

Despejando en cada caso los coeficientes respectivos, resultan ser:

$$A = y,\ B = \frac{dy}{dx},\ C = \frac{1}{2}\frac{d^2y}{dx^2},\ D = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3}\frac{d^3y}{dx^3},\ E = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}\frac{d^4y}{dx^4}, \text{ etc.}$$

Sustituyendo cada uno de estos en [6-1] queda la serie:

$$y = y + \left(\frac{dy}{dx}\right)x + \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)\frac{x^2}{2} + \left(\frac{d^3y}{dx^2}\right)\frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \ldots \qquad [6\text{-}6]$$

La serie [6-6] es atribuida a C. MacLaurin, quien la incorporó a sus trabajos de investigación en 1742; se la encuentra de manera semejante en la obra llamada *Teatrise of fluxions*, con el mismo nombre de MacLaurin. Sin embargo, antes que él en 1717, un compatriota suyo, Stirling, condiscípulo de Newton, la había ya utilizado en un libro llamado *Linea tertii ordinis Newtonianæ*, Prop. III. No obstante, el mismo desarrollo fue propuesto por Newton en un escrito llamado *Tractatus de quadratura curvarum* de 1723, en el cual determinó las áreas bajo curvas o *cuadraturas* de diferentes funciones.

En la demostración anterior usamos incluso la notación de MacLaurin. Para un uso más práctico lo plantearemos de la siguiente manera:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + f''(0)\frac{x^2}{2!} + f'''(0)\frac{x^3}{3!} + \ldots + f^n(0)\frac{x^n}{n!} + \ldots \qquad [6\text{-}7]$$

Donde $f(0), f'(0), f''(0)$, etc., indican que la función se anula para $x = 0$, y la literal $n!$, léase *n-factorial*, es un símbolo que agrupa a cada producto de los denominadores, por ejemplo, $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3$, $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4$, etc.

Otra forma también muy útil para los desarrollos es hacer $x = a$, de modo que para funciones que no están definidas en $x = 0$, como es el caso del logaritmo natural, se puedan obtener desarrollos para un valor de x diferente. La propuesta es la siguiente:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + f''(a)\frac{(x-a)^2}{2!} + \ldots + f^n(a)\frac{(x-a)^n}{n!} + \ldots \quad [6\text{-}8]$$

610 FLUXIONS.

The value of $\frac{\overline{a^2-x^2}^{\frac{1}{2}}}{\overline{c^2-x^2}^{\frac{1}{2}}}$, expressed in a series, is $\frac{a}{c} + \overline{\frac{a}{2c^3} - \frac{1}{2ac}} \times x^2 + \overline{\frac{3a}{8c^5} - \frac{1}{4ac^3} - \frac{1}{8a^3c}} \times x^4 + \overline{\frac{5a}{16c^7} - \frac{3}{16ac} - \frac{1}{16a^3c^3} - \frac{1}{16a^5c}} \times x^6 + \&c.$ Which value being therefore multiplied by $x^n\dot{x}$, and the fluent taken (by the common method) we get $\frac{ax^{n+1}}{\ldots} + \overline{\frac{a}{\ldots} - \frac{1}{\ldots}} \times \frac{x^{n+3}}{n+3} +$

: AB (1) :: BC (b) : GD (y) we have $y = \frac{b}{1+x}$, and consequently $\dot{u}\ (= y\dot{x}) = \frac{b\dot{x}}{1+x} = b \times \overline{\dot{x} - x\dot{x} + x^2\dot{x} - x^3\dot{x} + x^4\dot{x} - \&c.}$ Whence, BGDC, the area itself will be $= b \times x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5}$, &c. which was to be found.

Hence it appears, that as these areas have the same properties as logarithms, this series gives an easy method

Desarrollo de una función en serie colocada en el *Teatrise* de MacLaurin.

Con las reglas [6-7] y [6-8] se asume que las funciones se pueden desarrollar a partir de las sumas de diversos polinomios que convergen a cero o bien a $x = a$. En los siguientes ejemplos se hace hincapié en esta condición.

EJEMPLO 1

Usando la regla de MacLaurin, desarrolle en serie de potencias la función $y = x^3 - 3x^2 + 5x - 1$. Hágalo alrededor de a) $x = 0$ y b) $x = 1$.

SOLUCIÓN:

a) Las derivadas de la función se anulan a partir de y^{iv}. Siendo:

$$y' = 3x^2 - 6x + 5,\ y'(0) = 5,\ y'' = 6x - 6,\ y''(0) = -6$$
$$y''' = 6,\ y'''(0) = 6,\ y^{iv} = 0,\ y^{iv}(0) = 0, \text{ etc.}$$

Sustituyendo las respectivas evaluaciones en la regla [6-7] nos queda el desarrollo:

$$x^3 - 3x^2 + 5x - 1 = 1 - 5x - \frac{6}{2!}x^2 + \frac{6}{3!}x^3$$

Que en esencia es la misma función inicial.

b) $y(1) = 2,\ y' - 3x^2 - 6x + 5,\ y'(1) - 2,\ y'' = 6x - 6,\ y''(1) = 0,$
$y''' = 6,\ y'''(1) = 6,\ y^{iv} = 0,\ y^{iv}(1) = 0$, etc.
Sustituyendo estos valores en la expresión [6-8], queda:

$$x^3 - 3x^2 + 5x - 1 = 2 + 2(x-1) - \frac{0}{2!}(x-1)^2 + \frac{6}{3!}(x-1)^3$$

O bien:

$$x^3 - 3x^2 + 5x - 1 = (x-1)^3 + 2(x-1) + 2$$

EJEMPLO 2

Desarrolle en serie de Maclaurin, alrededor de cero, las funciones $y = \text{sen } x$ e $y = \cos x$.

SOLUCIÓN:

a) Las derivadas consecutivas para la función $y = \text{sen } x$ se reiteran a partir de la cuarta derivada, tal como se puede ver enseguida:

$$y = \text{sen } x,\ y(0) = 0,\ y' = \cos x,\ y'(0) = 1,\ y'' = -\text{sen } x,\ y''(0) = 0,$$
$$y''' = -\cos x,\ y'''(0) = -1,\ y^{iv} = \text{sen } x,\ y^{iv}(0) = 0, \text{ etc.}$$

Sustituyendo cada una de estas en la regla [6-7], queda:

$$\text{sen } x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots \qquad [6\text{-}9]$$

b) De igual manera que para la función seno, las derivadas de la función coseno se reiteran a partir de la cuarta derivada. Estas son:

$$y = \cos x,\ y(0) = 1,\ y' = -\text{sen } x,\ y'(0) = 0,\ y'' = -\cos x,\ y''(0) = -1,$$
$$y''' = \text{sen } x,\ y'''(0) = 0,\ y^{iv} = \cos x,\ y^{iv}(0) = 1, \text{ etc.}$$

Sustituyendo cada una de estas en la regla [6-7], queda:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots \qquad [6\text{-}10]$$

Los desarrollos en serie de la función seno, la aproximan a partir de los polinomios parciales siguientes:

$$y_1 = x,\ y_2 = x - \frac{x^3}{3!},\ y_3 = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}, \text{ etc.}$$

Utilicemos las tres primeras aproximaciones polinomiales para determinar el valor de sen $\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0{,}5$. Como es de esperar, cada una de las aproximaciones deberá ir convergiendo al resultado real. Usemos las nueve cifras que nos da la calculadora. Veamos:

$$y_1 = \left(\frac{\pi}{6}\right) = 0{,}523598775,\quad y_2 = \frac{\pi}{6} - \frac{\left(\frac{\pi}{6}\right)^3}{3!} = 0{,}499674179,$$

$$y^3 = \frac{\pi}{6} - \frac{\left(\frac{\pi}{6}\right)^3}{3!} + \frac{\left(\frac{\pi}{6}\right)^5}{5!} = 0{,}500002132$$

Como se ve, el resultado de la tercera aproximación es bastante confiable, la diferencia entre la última suma y el resultado real es del orden de 0,000002132, el cual para usos prácticos se puede considerar nulo. Este último valor es ya conocido, de hecho es el residuo que resulta de la aproximación, la cual hemos determinado a través de la operación $R_n = y - y_n$; al residuo volveremos más adelante.

Al graficar la función seno al lado de la gráfica de cada uno de los polinomios, vemos cómo las sumas de cada uno de estos últimos convergen a la función desarrollada en un intervalo muy cercano a $x = 0$; véase la Figura 6.1. Más *ver* la convergencia no debe ser suficiente.

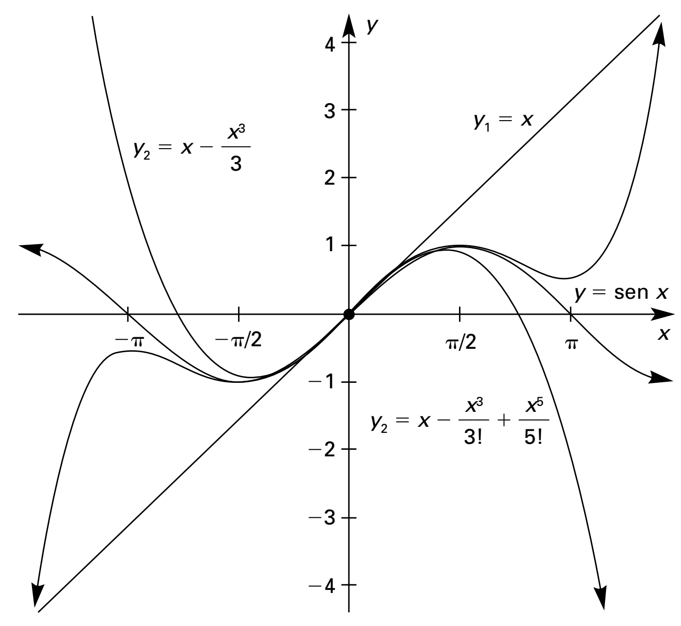


FIGURA 6.1. Las gráficas de los polinomios y_1, y_2, y_3, etc., convergen a la gráfica de la función seno.

EJEMPLO 3

Desarrolle en serie de MacLaurin la función exponencial $y = e^u$, alrededor de cero.

SOLUCIÓN:

Las derivadas sucesivas de la función son idénticas, así como también las evaluaciones correspondientes, o sea: $y(0) = 1$, $y' = e^u$, $y'(0) = 1$, $y'' = e^u$, $y''(0) = 1$, etc. Sustituyendo estas en la expresión [6-7] se tiene el desarrollo:

$$e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2!} + \frac{u^3}{3!} + \frac{u^4}{4!} + \ldots + \frac{u^n}{n!} + \ldots \qquad [6\text{-}11]$$

Dispuesta de esa manera la expresión [6-11] permite determinar desarrollos de funciones exponenciales más complicadas sin necesidad de derivarlas sucesivamente. Veamos algunos casos.

EJEMPLO 4

Desarrolle en serie de MacLaurin la función $y = e^{-5x}$.

SOLUCIÓN:

Haciendo $u = -5x$ y sustituyendo este valor en [6-11] queda:

$$e^{-5x} = 1 + (-5x) + \frac{(-5x)^2}{2!} + \frac{(-5x)^3}{3!} + \ldots$$

O bien:

$$e^{-5x} = 1 + -5x + \frac{25x^2}{2} - \frac{125x^3}{6} + \ldots$$

EJEMPLO 5

Desarrolle en serie de potencias la función $y = e^{x^2}$.

SOLUCIÓN:

De la misma manera que en el ejemplo 4, hagamos $u = x^2$ y sustituyámosle en [6-11], y puesto que las derivadas impares se anulan, queda:

$$e^{x^2} = 1 + (e^{x^2}) + \frac{(e^{x^2})^4}{2!} + \frac{(e^{x^2})^6}{3!} + \ldots$$

La riqueza de la expresión [6-11] se aprecia mejor en la determinación de las funciones hiperbólicas. Para ello desarrollemos en serie de potencias la función $y = e^{ix}$ e $y = e^{-ix}$, considerando que el número imaginario i se define como $i^2 = -1$. Así:

$$e^{ix} = 1 + ix - \frac{x^2}{2!} - i\frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots \quad (1)$$

$$e^{-ix} = 1 - ix - \frac{x^2}{2!} + i\frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots \quad (2)$$

Sumando (1) con (2) resulta el desarrollo para el coseno hiperbólico en la forma:

$$\cosh x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots\right) \quad [6\text{-}12]$$

Restando (1) con (2) queda el desarrollo para el seno hiperbólico como:

$$\text{senh}\, x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2} = \frac{i}{2}\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots\right) \quad [6\text{-}13]$$

De [6-12] y [6-13] se deduce la relación fundamental de la teoría de *variable compleja*:

$$e^{ix} = \frac{\cosh x + \text{senh}\, x}{2} \quad [6\text{-}14]$$

Puesto que ambos argumentos: cosh x y senh x, son semejantes, desde aquí a las funciones trigonométricas correspondientes, podemos sustituir $x = \pi$ en [6-12] y [6-13] para llegar a la conocida identidad de Euler, es decir:

$$\cosh \pi = \frac{e^{i\pi} + e^{-i\pi}}{2} = -1, \ \ \operatorname{senh} \pi = \frac{e^{i\pi} - e^{-i\pi}}{2} = 0$$

De aquí que al sumar ambas expresiones quede:

$$e^{i\pi} = -1 \qquad [6\text{-}15]$$

Finalmente, veamos cómo la expresión [6-11] converge al número e para el valor de $u = 1$. Sustituyendo este último en la expresión nos queda:

$$e^1 = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \ldots$$

Si sumamos hasta el polinomio de grado siete llegamos a la aproximación:

$$e = 2{,}71825396825396825396825396825 4\ldots$$

EJEMPLO 6

Desarrolle en serie de potencias la función logaritmo natural, alrededor de $x = 1$.

SOLUCIÓN:

Las función y sus derivadas consecutivas evaluadas en $x = 1$ son:

$$y = \ln x,\ y(1) = 0,\ y' = \frac{1}{x},\ y'(1) = 1,\ y'' = \frac{-1}{x^2},\ y''(1) = -1,$$
$$y''' = \frac{1}{x^3},\ y'''(1) = 1, \text{ etc.}$$

Sustituyendo estos valores en la expresión [6-8] resulta:

$$\ln x = (x - 1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \ldots$$

6.2.1. SEGUNDA CONDICIÓN SUFICIENTE DE CONVERGENCIA DE D'ALEMBERT

La proposición [6-18] afirma lo siguiente:

Cuando en una serie de términos positivos:

$$S = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1} + a_n + \dots$$

la relación de un término al precedente tiende hacia un límite finito K*, cuando* n *crece sin límite, la serie es divergente si* K *es mayor que uno, convergente si* K *es menor que uno, y no se puede precisar si convergente o divergente si* K *es igual a uno.*

[6-16]

Demostración:

Supongamos el caso en que $K < 1$. Designemos por r un número comprendido entre K y 1, de modo que a partir de cierto rango, la relación: $\frac{a_n}{a_{n-1}}$ es por hipótesis siempre inferior a r, es decir $\frac{a_n}{a_{n-1}} < r$. Con esta idea construyamos las siguientes sucesiones:

$$a_n < a_{n-1} \cdot r,\ \ a_{n+1} < a_n \cdot r,\ \ a_{n+2} < a_{n+1} \cdot r, \text{ etc.}$$

De aquí se deduce que:

$$a_n < a_{n-1} \cdot r, a_{n+1} < a_{n-1} \cdot r^2, a_{n+2} < a_{n-1} \cdot r^3, \text{ etc.}$$

Quedando la suma:

$$a_n + a_{n+1} + a_{n+2} + \dots < (r + r^2 + r^3 + \dots)a_{n-1}$$

Y puesto que r es menor que uno:

$$a_n + a_{n+1} + a_{n+2} + \dots < \left(\frac{r}{1 - r}\right)a_{n-1}$$

Es decir, la serie de la derecha propuesta para $K < 1$ converge a la suma indicada, consecuentemente lo hace la serie de la izquierda, puesto que es menor que la mencionada.

Para que la proposición [6-16] sea verdadera, no es necesario que los primeros términos de la serie aproximen plenamente a la función; ya que siendo finito el número de estos, su suma también lo será.

El criterio anterior se aplica de la misma forma para cuando $K > 1$; es obvio que para este caso cambia el sentido de las desigualdades propuestas, de modo que los términos no tienden a cero, de aquí que la serie sea divergente.

Para $K = 1$ es difícil tomar una decisión hacia la convergencia de la serie.

En esencia la proposición [6-16] plantea que el límite $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n-1}} < 1$ para que la serie converja.

El criterio va más allá de solamente determinar el valor del límite $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n-1}} = K$. De esta última relación se desprende que para cualquier valor fijo de la serie [6-8] el límite $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n-1}} = (x - a)K$. De aquí que si:

1. $K = 0$ la serie [6-8] es convergente para todo valor de x.
2. Si K es diferente de cero, la serie [6-8] es convergente en el intervalo

$$a - \frac{1}{|K|} < x < a + \frac{1}{|K|} \qquad [6\text{-}17]$$

Dejaremos sin demostrar esta última.

Veamos algunos casos particulares.

EJEMPLO 1

Use el criterio de D'Alembert para verificar la convergencia de la serie geométrica $S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} + \ldots$ vista anteriormente. Determine además el intervalo de convergencia de la serie.

SOLUCIÓN:

a) Puesto que el término enésimo es $\frac{1}{2^{n-1}}$, el término siguiente $(n + 1)$ será $\frac{1}{2^n}$, con ello se trata de determinar el límite:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{2^n}}{\frac{1}{2^{n-1}}}, \text{ o sea: } \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n-1}}{2^n} = 2^{-1} = \frac{1}{2}$$

De aquí que $K = \frac{1}{2}$ es menor que uno y la serie es convergente.

b) El intervalo de convergencia de la serie es $-2 < x < 2$.

EJEMPLO 2

Verifique que la suma $e^1 = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \ldots$ del ejemplo 5 visto anteriormente, es convergente. Determine además el intervalo de convergencia de la serie.

SOLUCIÓN:

a) Se trata de calcular el límite:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{1}{(n+1)!}}{\dfrac{1}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n!(n+1)}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n!(n+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(n+1)} = 0$$

En este caso $K = 0$ es menor que uno, de modo que la serie propuesta es convergente, tal como se había ya determinado.

b) Puesto que $K = 0$ la serie converge en $(-\infty, \infty)$.

EJEMPLO 3

Verifique si la serie $x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + \dots + \dfrac{x^n}{n} + \dots$ es convergente.

SOLUCIÓN:

Se trata de calcular el límite:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{x^{n+1}}{n+1}}{\dfrac{x^n}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{nx^{n+1}}{(n+1)x^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} x = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) x = 1 \cdot x = x$$

El resultado depende del valor de x, si $x < 1$ o $x > 1$, la serie propuesta será convergente o divergente, respectivamente. Para el caso cuando $x = 1$, la serie es divergente, puesto que resulta ser la serie armónica.

6.2.2. MÉTODO DE LA DIVISIÓN PARA DETERMINAR LOS DESARROLLOS DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS: TANGENTE, COTANGENTE, SECANTE, COSECANTE E INVERSAS

Si nos proponemos determinar el desarrollo de las funciones trigonométricas: tangente, secante, cotangente y cosecante, utilizando la serie de MacLaurin, ello es factible, más, dependiendo de la aproximación deseada; las derivadas y evaluaciones consecutivas van siendo cada vez más complicadas para su determinación.

En consecuencia, plantearemos un método alternativo que evita la derivación recursiva. El método hace necesaria la división entre series. Veámoslo para el desarrollo de la función tangente:

Usando la identidad que corresponde a esta función, tendremos:

$$\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \frac{x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \dots}{1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} + \dots}$$

Luego podemos ordenar la división como:

$$
\begin{array}{r|l}
 & x + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{3x^5}{24} + \dots \\
\hline
1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \dots & x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \dots \\
 & -x + \dfrac{x^3}{2!} - \dfrac{x^5}{4!} + \dots \\
\cline{2-2}
 & \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{30} + \dots \\
 & \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{6} \\
\cline{2-2}
 & \dfrac{2x5}{15} \\
 & \dots
\end{array}
$$

Cuyo cociente corresponde al desarrollo buscado, es decir:

$$\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \dots$$

Para desarrollar las funciones trigonométricas inversas usaremos el siguiente procedimiento. Cabe destacar que se deduce de la propia regla de MacLaurin:

a) Se propone la función trigonométrica inversa.
b) Se deriva la función.
c) Se desarrolla en serie de potencias la función derivada y se verifica si las potencias son de grado impar o par.
d) Se igualan los coeficientes del desarrollo de la derivada pares o impares, con los coeficientes impares o pares que complementan el desarrollo de la derivada, con los de la propia derivada de regla [6-5], o sea:

$$y = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \dots$$

e) Se sustituyen los coeficientes encontrados en la regla [6-5].
f) El desarrollo buscado de la serie trigonométrica inversa se encuentra en el último paso.

En esencia, el método consiste en derivar la función cuyo desarrollo se desea encontrar y *antiderivar*, es decir, hacer el proceso contrario de derivar usando la regla [6-5] para llegar a la serie buscada.

Veamos lo anterior con el ejemplo del desarrollo de la función $y = \operatorname{arcsen} x$.

La derivada de la función es $y = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$. El desarrollo en serie de esta derivada se determina usando el teorema del binomio como:

$$(1 - x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^4 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^6 + \dots \quad (1)$$

Este último contiene solamente las potencias pares de x, de modo que el propio desarrollo de la función buscada debe contener las potencias impares. Propongamos la regla [6-5] solamente con las potencias impares que le componen, es decir:

$$y = Ax + Bx^3 + Cx^5 + Dx^7 + \dots \quad (2)$$

Derivando esta última, queda:

$$\frac{dy}{dx} = A + 3Bx^2 + 5Cx^4 + 7Dx^6 + \dots \quad (3)$$

Igualando los coeficientes en (1) y (3) resulta:

$$A - 1, 3B = \frac{1}{2} 5C = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}, 7D = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}, \text{etc.}$$

De aquí que sustituyendo cada coeficiente en la serie (2) se llega a la serie buscada:

$$\text{arcsen}\, x = x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3x^5}{2 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5x^5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} + \dots$$

EJEMPLO 1

Antiderivando, encuentre el desarrollo correspondiente de la función arctg x.

SOLUCIÓN:

La derivada de la función es: $y' = \frac{1}{1 + x^2}$. El desarrollo correspondiente se puede determinar con el teorema de binomio, como:

$$(1 + x^2)^{-1} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots \quad (1)$$

Puesto que las potencias del desarrollo son pares, proponemos la regla [6-5] en potencias impares de la forma:

$$y = Ax + Bx^3 + Cx^5 + Dx^7 + \dots \quad (2)$$

Cuya derivada es:

$$\frac{dy}{dx} = A + 3Bx^2 + 5Cx^4 + 7Dx^6 + \dots \quad (3)$$

Igualando (1) con (3), obtenemos los coeficiente respectivos, siendo:

$$A = 1, B = \frac{-1}{3}, C = \frac{1}{5}, D = \frac{-1}{7}, \text{etc.}$$

Sustituyendo estos últimos en (2) resulta:

$$\text{arctg}\, x = x - \frac{1}{3}x + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \dots$$

El método que hemos planteado es idéntico a la forma en que Newton le utilizó en el cálculo de *cuadraturas* que antes mencionamos. Este consignó la serie [6-5] con la siguiente notación

$$R = e + fz^n + gz^{2n} + hz^{3n} + \text{etc.}$$

6.2.3. INTERVALOS DE CONVERGENCIA DE DERIVADAS RACIONALES

En el desarrollo de la función Ln $(1 - x)$, la función derivada se presenta bajo la forma de una función racional $y = \dfrac{1}{1 - x}$ con la cual es posible, como vimos, determinar el desarrollo de la función inicial. En estos casos conviene antes de la antiderivación, determinar el intervalo de convergencia del desarrollo de la función derivada, el cual es a su vez heredado al desarrollo buscado de la función primitiva. Lo anterior se justifica a partir de que en el cálculo estándar, el dominio de la derivada de una función $f(x)$ corresponde al dominio de la propia función derivada, con las debidas reservas. En este caso, el desarrollo de la función $y = \dfrac{1}{1 - x}$, converge en el intervalo $-1 < x < 1$, lo cual trae por consecuencia que el desarrollo de la función Ln $(1 - x)$ converja en ese mismo intervalo.

6.3. SERIE DE TAYLOR Y SU CONVERGENCIA

Con pocos arreglos se puede llegar de la serie [6-7] de MacLaurin

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + f''(0)\frac{x^2}{2!} + f'''(0)\frac{x^3}{3!} + \dots + f^n(0)\frac{x^n}{n!} + \dots$$

a la serie de Taylor. Esta última se escribe como:

$$f(x + h) = f(x) + f'(x)h + f''(x)\frac{h^2}{2!} + f'''(x)\frac{h^3}{2!} + f'''(x)\frac{h^3}{3!} + \dots + f^n(x)\frac{h^n}{n!} + \dots \quad [6\text{-}18]$$

En la serie [6-18] h puede verse como el incremento Δx o bien como un diferencial dx. En la práctica se llega realmente de la serie de Taylor a la de MacLaurin; nosotros elegimos la ruta contraria por la utilidad que tiene la segunda para determinar

los desarrollos en serie de funciones analíticas. No obstante, la serie generatriz tanto de series de potencias como las que hemos visto, así como del teorema del binomio, lo es la serie de Taylor.

Puesto que la serie de Taylor generaliza a la totalidad de las aquí vistas, nos interesaremos enseguida por demostrar su convergencia, de modo que, como consecuencia, ello permita demostrar la convergencia de las funciones desarrolladas anteriormente con la serie de MacLaurin. La importancia de demostrar que el desarrollo en serie de una función analítica es convergente se debe a su utilidad en diversas aplicaciones de la matemática, por ejemplo en la solución de ecuaciones diferenciales o bien en las soluciones numéricas de ecuaciones de diversos órdenes.

Particularmente cuando $x = a$, h pasa a ser $x - a$, llegándose así a la serie [6-8]. Particularmente cuando $a = 0$, se tiene el caso particular [6-7] ya descrito. De manera general en el polinomio:

$$f(x) = f(a) + f'(a)x + f''(a)\frac{x^2}{2!} + f'''(a)\frac{x^3}{3!} + \ldots + f^n(a)\frac{x^n}{n!} + \ldots \quad (1)$$

no necesariamente se cumple la igualdad por las circunstancias que involucran al residuo $R_n(x)$. De este modo, la serie quedará completa si involucramos este valor, es decir:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + f''(a)\frac{(x-a)^2}{2!} + \ldots + f^n(a)\frac{(x-a)^n}{n!} + R_n(x) \quad (2)$$

De esta expresión se desprende que:

$$R_n(x) = f(x) - \left[f(a) + f'(a)x + f''(a)\frac{x^2}{2!} + \ldots + f^n(a)\frac{x^n}{n!}\right] \quad (3)$$

El residuo $R_n(x)$ es conocido como *término complementario*. Para aquellos valores de x en los que $\lim_{n \to \infty} R_n(x) = 0$, el polinomio da un valor aproximado de la función. El desarrollo de la función seno que vimos en la sección anterior para determinar $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0{,}5$ es un buen ejemplo de esto último, en este caso el residuo fue casi nulo.

Dadas las regularidades que las potencias del desarrollo en la serie de MacLaurin evidencian, es común proponer el residuo a partir de ellas como:

$$R_n(x) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}Q \quad (4)$$

En la cual Q es de pronto una función en x que se desconoce, y deseamos determinar. Si igualamos a cero la expresión (2) e involucramos el valor de R_n, tendremos que:

$$(5)\quad \begin{cases} f(x) - f(a) - f'(a)(x-a) - f''(a)\dfrac{(x-a)^2}{2!} - \ldots - f^n(a)\dfrac{(x-a)^n}{n!} + \\ \qquad\qquad + \dfrac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}Q = 0 \end{cases}$$

A partir de (5) construyamos ahora una función auxiliar $\varphi(t)$ de variable t con, $t = a$ y t entre a y x, de modo que:

$$\varphi(a) = 0 \;\; y \;\; \varphi(x) = 0 \quad (6)$$

Es decir, la función se anula al sustituir los valores de a y x respectivamente. La función auxiliar resta:

$$\varphi(t) = f(x) - f(t) - f'(t)(x-t) - f''(t)\frac{(x-t)^2}{2!} - \ldots - f^n(t)\frac{(x-t)^n}{n!} + \frac{(x-a)^n}{(n+1)!}$$

Calculemos la derivada de $\varphi(t)$:

$$\varphi'(t) = -f'(t) + f'(t) - (x-t)f''(t) + \frac{2(x-t)}{2}f''(t) - \frac{(x-t)^2}{2!}f'''(t) + \ldots$$
$$- \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}f^n(t) + \frac{n(x-t)^{n-1}f^n(t)}{n!} - \frac{(x-t)^n f^{n+1}(t)}{n!} + \frac{(n+1)(x-t)^n}{(n+1)!}Q$$

Reduciendo términos queda:

$$\varphi'(t) = -\frac{(x-t)^n f^{n+1}(t)}{n!} + \frac{(x-t)^n}{n!}Q \quad (7)$$

De lo anterior resulta que el polinomio tiene derivadas en todo t cercano a a. De aquí que por las condiciones planteadas en (6) podemos aplicar el teorema de Rolle a la última expresión, de suerte que existe un valor $t = c$ comprendido entre a y x, en el cual $\varphi'(c)$; es decir, en ese valor la función $\varphi(t)$ tiene un valor máximo o mínimo. A partir de la relación (6) queda que:

$$\varphi'(c) = -\frac{(x-c)^n f^{n+1}(c)}{n!} + \frac{(x-c)^n}{n!}Q$$

De donde:

$$Q = f^{n+1}(c)$$

Sustituyendo este valor en la expresión (4) nos queda el residuo como:

$$R_n(x) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{n+1}(c) \qquad [6\text{-}19]$$

Si Q es el valor máximo de $f^{n+1}(c)$ para t en el intervalo $a \le t \le x$. Entonces es válida la desigualdad:

$$|R_n(x)| \leq \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!} f^{n+1}(c) \qquad [6\text{-}20]$$

El término complementario fue determinado por Lagrange en la forma en que le hemos exhibido. Propuso además un valor para c de la siguiente manera:

$$c = a + \theta(x-a) \qquad [6\text{-}21]$$

En la cual θ es un valor comprendido entre 0 y 1. De aquí que la expresión [6-19] se pueda reescribir como:

$$R_n(x) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{n+1}(a + \theta(x-a)) \qquad [6\text{-}22]$$

En tanto que bajo este término la serie de MacLaurin queda:

$$\left.\begin{aligned} f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + f''(a)\frac{(x-a)^2}{2!} + \ldots + f^n(a)\frac{(x-a)^n}{n!} + \\ + f^{n+1}(a+\theta(x-a))\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} \end{aligned}\right\} \qquad [6\text{-}23]$$

Luego, para verificar si el desarrollo en serie de potencias de una función analítica es convergente, sería necesario, bajo la perspectiva del residuo [6-20] proponer el propio residuo a partir de las regularidades de la serie y los valores máximos o mínimos con que esta cuente en el intervalo $a < t < x$, de modo que $|R_n(x)| \to 0$ cuando $n \to \infty$. Se hace necesario plantear esto último con un par de ejemplos.

EJEMPLO 1

Demuestre que el desarrollo de la función exponencial [6-1] converge a la función e^x.

SOLUCIÓN:

La serie $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + R_n$, está determinada para el extremo $a = 0$. Esta tiene por $n + 1$ derivada la función $f^{n+1}(t) = e^t$. Para valores de $x > 0$ el valor máximo de e^t entre $0 \leq t \leq x$ es e^x. Para cuando $x < 0$ el valor de e^t en $x \leq t \leq 0$ se encuentra en $e^0 = 1$. Para el primer caso:

$$|R_n(x)| \leq \frac{e^x}{(n+1)!} x^{n+1}$$

Al aplicar la regla de D'Alembert a la expresión [6-1)], como:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{x}{(n+1)} = 0$$

Se deja ver que la serie es convergente en el intervalo $(-\infty, \infty)$, y en consecuencia la serie converge a e^x. Para cuando $x < 0$, sustituimos por $|R_n(x)| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$ con la misma conclusión. De aquí que para toda x es cierto que:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$$

EJEMPLO 2

Demuestre que la serie [6-9] converge a la función seno.

SOLUCIÓN:

Puesto que la derivada de la función seno se anula cada $n\frac{\pi}{2}$ ciclos, la función cuenta con máximos en esos valores. De aquí que podemos escribir la serie respectiva como:

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + \frac{x^n}{n!} \operatorname{sen} n\frac{\pi}{2} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \operatorname{sen}\left[c + (n+1)\frac{\pi}{2}\right]$$

Y puesto que el residuo: $\operatorname{sen}\left[c + (n+1)\frac{\pi}{2}\right] \leq 1$ con

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{x}{(n+1)} = 0$$

se tendrá que $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$, para toda x.

De aquí que sea cierto el desarrollo:

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots$$

6.3.1. DEMOSTRACIÓN DE LA PROPOSICIÓN [5-10]

En la sección [5.5.4] dejamos pendiente la demostración de la proposición [5-10] en la que se asume la utilidad del criterio de la tercera derivada para decidir por el punto de inflexión en la hipótesis de $f''(x) = 0$, es decir:

Si $f''(a) = 0$, $x = a$, *es un punto crítico de la segunda derivada, este será punto de inflexión si al sustituirlo en la última derivada impar, que no sea nula, el resultado es distinto de cero:* $f'''(a) \neq 0$ *o* $f^{v}(0) \neq 0$ *o, etc.*

Para la demostración, hagamos uso de la serie de Taylor hasta la tercera derivada en la forma [6-18], como:

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + f''(x)\frac{h^2}{2!} + f'''(x)\frac{h^3}{3!} \quad (1)$$

En (1) consideremos $b = x + h$ y $a = x$. No obstante que:

$$0 < a < x < b, \text{ con } b - a > 0 \quad (2)$$

De modo que (1) quede como:

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b - a) + f''(a)\frac{(b-a)^2}{2!} + f'''(a)\frac{(b-a)^3}{3!}$$

Enseguida hagamos:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(a) + f''(a)\frac{(b-a)}{2!} + f'''(a)\frac{(b-a)^2}{3!}$$

Aplicando a esta última expresión el teorema del valor medio, resulta que:

$$f'(c) = f'(a) + f''(a)\frac{(b-a)}{2!} + f'''(a)\frac{(b-a)^2}{3!}$$

Para c entre a y b. Además:

$$f'(c) - f'(a) = f''(a)\frac{(b-a)}{2!} + f'''(a)\frac{(b-a)^2}{3!}$$

Aplicando de nuevo, en el miembro izquierdo, el teorema del valor medio, resulta:

$$f''(d)(c - a) = f''(a)\frac{(b-a)}{2!} + f'''(a)\frac{(b-a)^2}{3!}$$

Para d entre c y a, con $c - a > 0$ (3)

Puesto que de (2) y (3): $b - a > 0$, $c - a > 0$, y por hipótesis partimos de que $f''(a) = 0$, queda:

$$f''(d)(c - a) = f'''(a)\frac{(b-a)^2}{3!} \quad (4)$$

De aquí se desprende que $f''(d) > 0$ o $f''(d) < 0$, y puesto que $c - a > 0$ además de que $b - a > 0$, resulta que el miembro izquierdo de (4) es diferente de cero, consecuentemente para el miembro derecho: $f'''(a) \neq 0$, lo cual se deseaba demostrar.

ACTIVIDADES Y EJERCICIOS DEL CAPÍTULO 6

I. Desarrolle las siguientes funciones en series de potencias haciendo uso del teorema del binomio de Newton.

1. $y = \dfrac{1}{a + x}$

2. $y = \sqrt{1 - x^2}$

3. $y = \dfrac{1}{\sqrt{5 - x^2}}$

4. $y = \dfrac{x}{\sqrt{3 - x^2}}$

Es conveniente disponerle como:

$$y = \frac{1}{\sqrt{5}} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{1}{5}x\right)^2}}$$

II. Haciendo uso de la regla de MacLaurin, desarrolle en serie de potencias, para $x = 0$ y $x = 1$, las siguientes funciones, o en su caso, haga el desarrollo con el teorema del binomio de Newton.

5. $f(x) = \sqrt{x + 1}$

6. $f(x) = x^5 + 2x^4 - 3x^3 - 2x^2 + 5x - 1$

7. $f(x) = \dfrac{1}{1 + x^2}$

8. $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x + 1}}$

9. Desarrolle en serie de potencias para $x = \Delta x$ la función $f(x) = x^n$, y muestre que el resultado se trata del teorema del binomio de Newton.

III. Desarrolle en serie de MacLaurin las siguientes funciones, determine por lo menos los tres primeros términos para cada serie.

10. $f(x) = \text{tg}\, x$

11. $f(x) = \sec x$

12. $f(x) = \text{cotg}\, x$

13. $f(x) = \text{cosec}\, x$

14. $f(x) = e^{\frac{-1}{x}}$

15. $f(x) = e^{\sqrt{2x}}$

16. $f(x) = x \cosh x$

17. $f(x) = \text{sen}\, x^2$

18. $f(x) = \dfrac{1 - x}{1 + x}$

19. $f(x) = \ln(1 - x)$

20. $f(x) = e^{-x^2}$

21. $f(x) = \dfrac{\text{sen}\, x}{x}$

22. $f(x) = \dfrac{3x - 5}{\sqrt{x}}$

23. $f(x) = \dfrac{1}{1 + x - x^2}$

24. $f(x) = \cos^2 x$

Use la identidad $\dfrac{1 + \cos 2x}{2}$

25. $f(x) = \text{sen}^2\, x$

26. $f(x) = a^x$

27. De los desarrollos obtenidos en los problemas 24) y 25) concluya la veracidad de la identidad $\cos^2 x + \text{sen}^2\, x = 1$.

28. Desarrolle en serie de MacLaurin la función $f(x) = \sqrt{x + 1}$ haciendo uso de por lo menos las primeras cinco derivadas. Con ello dé el valor de x = 1 para determinar una aproximación a $\sqrt{2}$. Obtenga además el residuo correspondiente.

29. Desarrolle las funciones Ln $(1 + x)$ y Ln $(1 - x)$, para determinar el desarrollo de la serie Ln $\dfrac{(1 + x)}{(1 - x)}$.

30. Haga uso del desarrollo de la serie de la expresión Ln $\dfrac{(1 + x)}{(1 - x)}$ para determinar Ln 2 y Ln 3; aproxime con los cinco primeros términos.

31. De manera similar al problema 30, aproxime a partir de la serie Ln $x = (x - 1) - \dfrac{(x-1)^2}{2!} + \dfrac{(x-1)^3}{3!} - \ldots$ el valor de Ln 2 y Ln 3, compare con los resultados anteriores.

32. Usando la identidad $\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$, haga la división $\cos x\overline{)1}$, o bien $1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \ldots\overline{)1}$, para determinar el desarrollo en serie de potencias de la función secante. Resuelva algo semejante para determinar el desarrollo de la función cotangente y cosecante.

33. Use el método de antiderivar para determinar los desarrollos de las funciones trigonométricas inversas: arcocoseno, arcocotangente, arcosecante y arcocosecante.

IV. Determine la convergencia o divergencia de las siguientes series. Si la hubiera, determine el intervalo correspondiente.

34. $\dfrac{1}{1 \cdot 2} + \dfrac{1}{2 \cdot 3} + \dfrac{1}{3 \cdot 4} + \ldots + \dfrac{1}{n(n+1)} + \ldots$

35. $\dfrac{1}{1 \cdot 3} + \dfrac{1}{2 \cdot 4} + \dfrac{1}{3 \cdot 5} + \ldots + \dfrac{1}{n(n+2)} + \ldots$

36. $x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \ldots \dfrac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots$

37. $\dfrac{x}{1} + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + \ldots + \dfrac{x^n}{n} + \ldots$

38. $1 \cdot x + 1 \cdot 2x + \ldots + n!x^n + \ldots$

V. Derive los siguientes desarrollos y demuestre que las series que resultan convergen a la función derivada que corresponde.

39. $\operatorname{sen} x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \ldots$

40. $\operatorname{tg} x = x + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{3x^5}{24} + \ldots$

41. $\text{Ln}\,(1 + x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots$

42. $\text{Ln}\,(1 - x) = -\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \ldots$

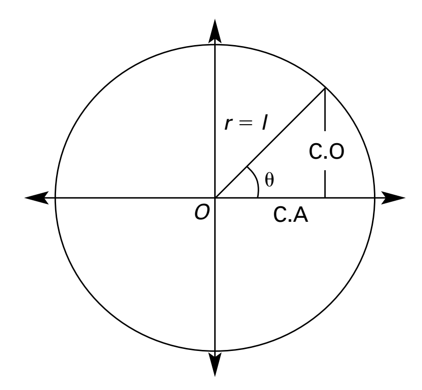
Construcción de funciones trigonométricas: la función seno

Apéndice

SECUENCIA DE TRABAJO N.º 1

Materiales necesarios: cartoncillo, compás, regla graduada, lápiz, goma, (no-calculadora).

1. En medio pedazo de cartoncillo, dibuje a escala un círculo de *radio uno* semejante al que se muestra en la figura anexa (para mayor comodidad se puede emplear un radio de diez centímetros). El gráfico debe incluir: ejes rectangulares, la letra O que designa el origen y el vértice donde inicia la descripción del círculo.
2. Haga variar el valor de θ desde 0° a 360° tomando valores angulares con el transportador de 20° en 20°, incluyendo los valores nominales múltiplos de π: 0°, 45°, 90°, 135°, 180°, 225°, 270°, 315° y 360°, o en radianes como se plantea más adelante:



3. Para cada intersección del círculo con los ángulos trace los segmentos que corresponden al cateto opuesto C. O y cateto adyacente C. A, como se muestra en la figura.
4. Mida con la regla graduada directamente los valores de ambos catetos y haga, a mano, la división $\frac{CO}{CA}$.

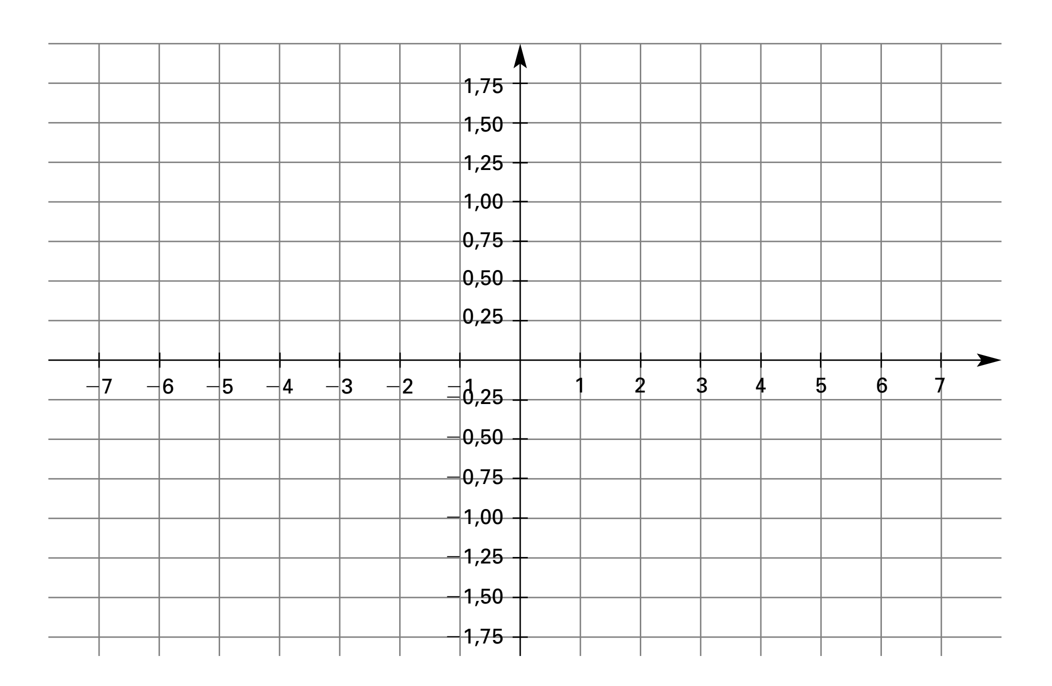
5. Anote los valores, llenando así la tabla que se adjunta:

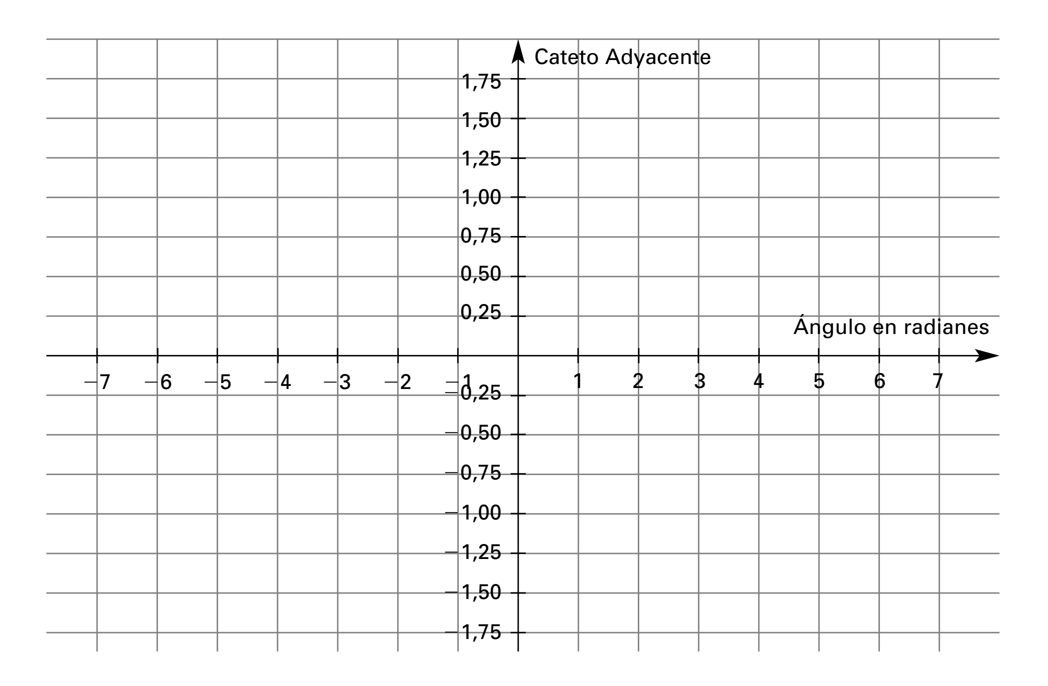
θ en grados	**θ en radianes**	**C.O**	**C.A**	$\frac{\text{CO}}{\text{CA}}$	**θ en grados**	**θ en radianes**	**C.O**	**C.A**	$\frac{\text{CO}}{\text{CA}}$
0					200				
20					220				
40					225				
45					240				
60					260				
80					270				
90					280				
100					300				
120					315				
135					320				
140					340				
160					360				
180									

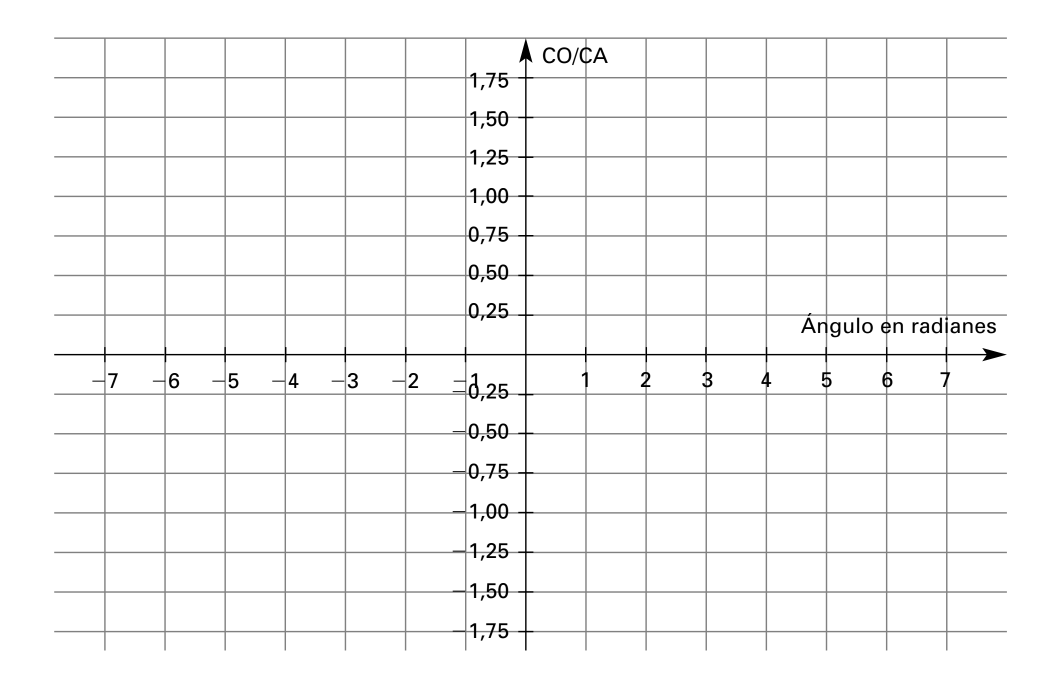
SECUENCIA DE TRABAJO N.º 2

6. Elabore o bosqueje las gráficas para el cateto opuesto C.O, cateto adyacente C.A y $\frac{CO}{CA}$ (estos valores se deben colocar en el eje de las ordenadas y deberá obtenerse una gráfica por expresión) en los ejes rectangulares que se dan enseguida. Los valores que van en el eje de las abscisas son las cantidades de los ángulos que se usaron de 20° en 20°, los cuales hay que colocar inicialmente en radianes, incluyendo también los valores de las cantidades nominales de

$$\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \pi, \frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{4}, 2\pi$$


1,75
1,50
1,25
1,00
0,75
0,50
0,25
−7
−6
−5
−4
−3
−2
−1
1
2
3
4
5
6
7
−0,25
−0,50
−0,75
−1,00
−1,25
−1,50
−1,75


Cateto Adyacente
Ángulo en radianes
1,75
1,50
1,25
1,00
0,75
0,50
0,25
−7
−6
−5
−4
−3
−2
−1
1
2
3
4
5
6
7
−0,25
−0,50
−0,75
−1,00
−1,25
−1,50
−1,75



SECUENCIA DE TRABAJO N.º 3

Responda las siguientes cuestiones:

1. ¿Reconoce las graficas obtenidas?
2. ¿A qué expresiones corresponden?
3. ¿Cuál es la gráfica de la expresión coseno?, ¿cuál la del seno? y ¿cuál la de la tangente?
4. Dé una definición, a partir de la actividad que realizó y en términos de los catetos, opuesto C.O y adyacente C.A, de las expresiones anteriores.
5. ¿En qué se asemejan y en qué valores de los radianes se intersecan, las gráficas de las expresiones seno y coseno?
   Escriba los valores de las intersecciones.
6. ¿En qué valor de los radianes inicia y termina la gráfica de la expresión seno? ¿En qué valor inicia la expresión coseno? ¿Lo mismo para la tangente?
7. ¿Qué sucede con las gráficas de estas expresiones si los valores tomados para los radianes son negativos? Intente la gráfica para esos valores en los mismos ejes rectangulares anteriores.
8. ¿Con respecto a qué ejes son simétricas las gráficas anteriores?
9. ¿La gráfica del seno es la misma que la del coseno?
10. ¿En qué valor de los radianes se coloca la parte más alta de la grafica del seno y coseno? ¿En que valor la parte más baja? ¿Lo mismo para la tangente?
11. ¿Cuál es valor del C.O para el seno en:

$$0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \pi, \frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{4}, 2\pi?$$

12. ¿Cuál es valor del C.A para el coseno en:

$$0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \pi, \frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{4}, 2\pi?$$

13. ¿Cuál es valor del $\frac{CO}{CA}$ para la tangente en:

$$0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \pi, \frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{4}, 2\pi?$$

14. ¿Qué sucede con la gráfica de la tangente en $\frac{\pi}{2}$?
15. Compruebe que tomando de la tabla que completó inicialmente los valores del C.O y C.A, para el ángulo de 40°, en la expresión: $\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$, así como también en $1 + \text{tg}^2 x = \sec^2 x$, estas son ciertas. (Para las operaciones, haga uso de su calculadora). Hágalo además para algunos de los valores nominales.
16. Demuestre que para $x = 20°$ (tome este valor en radianes de la tabla que diseñó) se cumplen las siguientes identidades:

   a) $\cos (x - y) = \cos x \cos y - \text{sen}\, x\, \text{sen}\, y$

   b) $\text{sen}\,(45° - x) = \dfrac{\cos x - \text{sen}\, x}{\sqrt{2}}$

17. Pruebe que las siguientes ecuaciones trigonométricas son válidas para los valores de x o a que se proponen (sustituya los valores dados en radianes):

   a) $2\, \text{sen}^2 x + 3 \cos x = 0$, para $x = 120°, 240°$

   b) $2\sqrt{3} \cos^2 a = \text{sen}\, a$, $a = 60°, 120°$

   c) $2\, \text{tg}^2 x + 3 \sec x = 0$, $x = 120°, 240°$

SOLUCIONARIO

SECCIÓN 1.1

I. 1. $\frac{4}{0}$. No es una operación válida en los reales.

2. $\frac{0}{0} = \infty$. No es una operación válida en los reales.

5. (a) Q; (b) I; (c) I; (d) I; (e) I.

II. 1. a) racional conmensurable
b) racional inconmensurable periódico.
c) racional conmensurable
d) irracional
e) racional conmensurable
f) racional conmensurable
g) racional conmensurable

III. Problemas para examen

1. d)

3. $23 + \frac{86}{10^2} + 5\left(\frac{1}{10^3} + \frac{1}{10^4} + \ldots\right)$

7. a) 2; 2,7048813829; 2,716923932; 2,718145927; 2,718268237; …; $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$
b) 0,00012231.
c) Es el irracional $e = 2{,}71828\ldots$

SECCIONES 1.2, 1.3 Y 1.4

I. 1. Orden en los números reales

3. $\sqrt{9} = |3| = \begin{cases} 3, \text{ si } 3 > 0 \\ -3, \text{ si } -3 < 0 \end{cases}$

II. 1. a) $20 < x < 21$
b) $50 < x < 60$
c) $7 < x < 10$
d) $x < 48$
e) $2 < x < 3$

2. a) $[5, \infty)$
c) $(-\infty, 2)$
e) $\frac{7}{2} < x < 4$
g) $(2, \infty)$
i) $(-\infty, 1)$
k) $\left(-\infty, -\frac{4}{3}\right)$
m) $\left[\frac{1}{3}, 1\right]$
o) $(-\infty, 0) + (5, \infty)$
q) Acepta todos los reales.
s) $x \neq |5| \neq \pm 5$
w) $(-\infty, -3) + (2, \infty)$
y) $(-\infty, -2] + [4, \infty)$

3. $\frac{3a+1}{a-5} > 1$ en $(-\infty, -3) + (5, \infty)$; $\frac{3a+1}{a-5} < 2$ en $(-11, 5)$

5. a) $\left(\frac{1}{3}, 1\right)$, c) $\left(-\frac{3}{5}, \infty\right)$. e) $(-3, \infty)$. g) $(-\infty, -3) + \left(\frac{-1}{3}, \infty\right)$,
i) $\left[-\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right), -\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)\right] + \left[\frac{3-\sqrt{5}}{2}, \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right]$

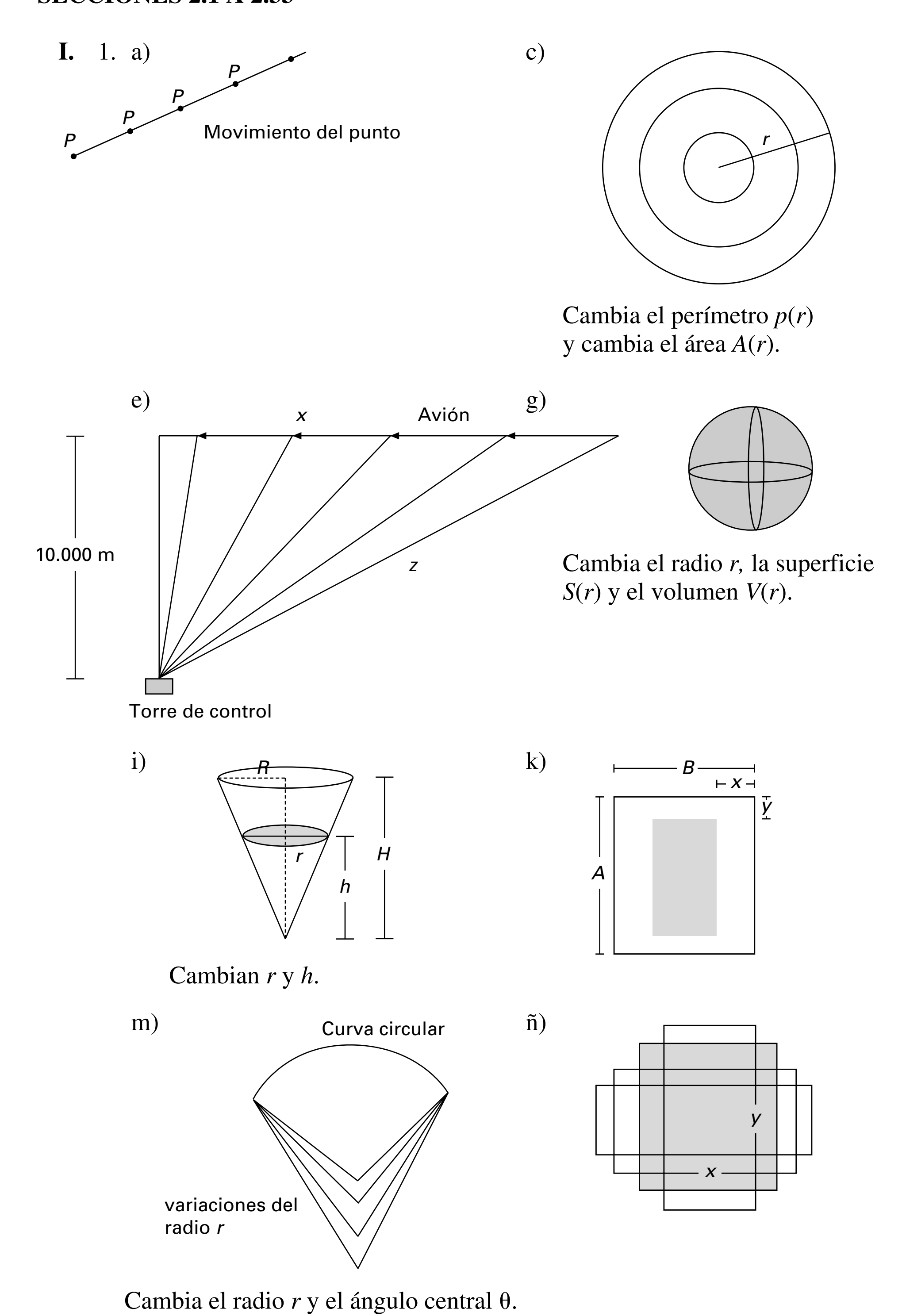
7. $1{,}42 < x < 1{,}89$

III. 1. $0 < °C < 15$, $32 < F < 59$

3. a) $\left(-\infty, \frac{8}{5}\right)$, c) $(-\infty, -3) + [1, \infty)$, e) $\left(\infty, \frac{-3}{4}\right] + \left[\frac{1}{2}, \infty\right)$

SECCIONES 2.1 A 2.33

I. 1.

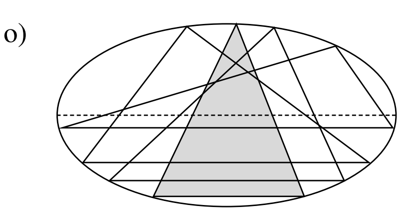


c) Cambia el perímetro $p(r)$ y cambia el área $A(r)$.

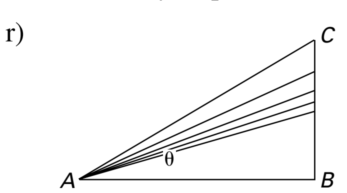
g) Cambia el radio r, la superficie $S(r)$ y el volumen $V(r)$.

i) Cambian r y h.

m) Cambia el radio r y el ángulo central θ.

o) 

Diferentes posiciones del triángulo inscrito en la elipse; cambia el área, su forma y su perímetro.

r) 

Variaciones del ángulo θ; cambia el área $A(\theta)$ del triángulo, y su perímetro $p(\theta)$.

II. 2. a) $f(-4) = -15,\ f\left(\dfrac{1}{2}\right) = 1,\ f(-2) = -11,\ f(2) = 5,\ f(0) = 3$

c) $g(-5) = 0,\ g(5) = 0,\ g(0) =$ No existe, $g(a) = \sqrt{a^2 - 25}$, $g(x - 5) = \sqrt{x^2 - 10x}$

e) $m(x + 1) = \dfrac{x^2 + 2x + 2}{x + 1},\ m(x) + 1 = \dfrac{x^2 + x + 1}{x}$

g) $t(x + h) - t(x) = \dfrac{1}{x + h} - \dfrac{1}{x} = \dfrac{-h}{x(x + h)}$

4. a) Todos los reales.
c) Todos los reales.
e) $(-\infty, 2) + (3, \infty)$

5. b) $yx^3 - a = 0$
d) $a^2y^2 + x^2y^2 = 1$

6. a) $y = \dfrac{a}{x}$

c) $y = \dfrac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$

e) $y = \sqrt{r^2 - x^2}$

g) $y = \dfrac{a \operatorname{sen} x}{1 - x}$

7. a) $V(r) = \dfrac{2}{3}\pi r^2$

   c) $A(x) = \dfrac{x\sqrt{16 - x^2}}{4}$

   f) $A(x) = x\sqrt{4 - a^2}$

   h) $f(1) - 3f(-1)f(0) = -4$

8. b) Irracional.

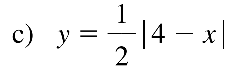
   d) Polinomial.

   f) Irracional, polinomial.

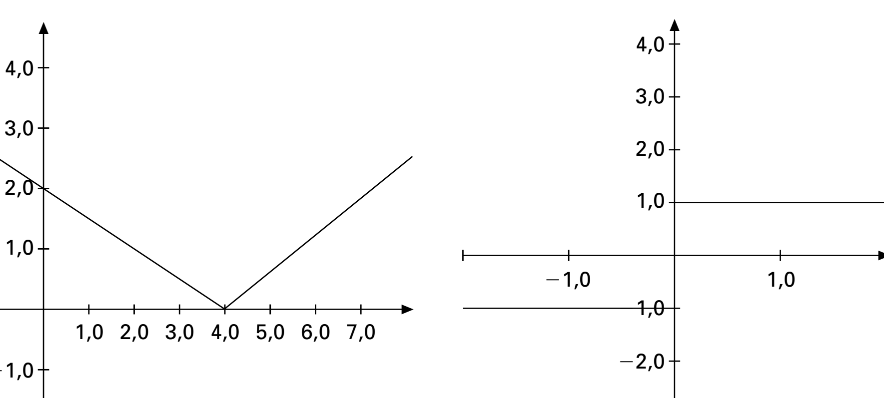
SECCIÓN 3.4

I. 1. a)

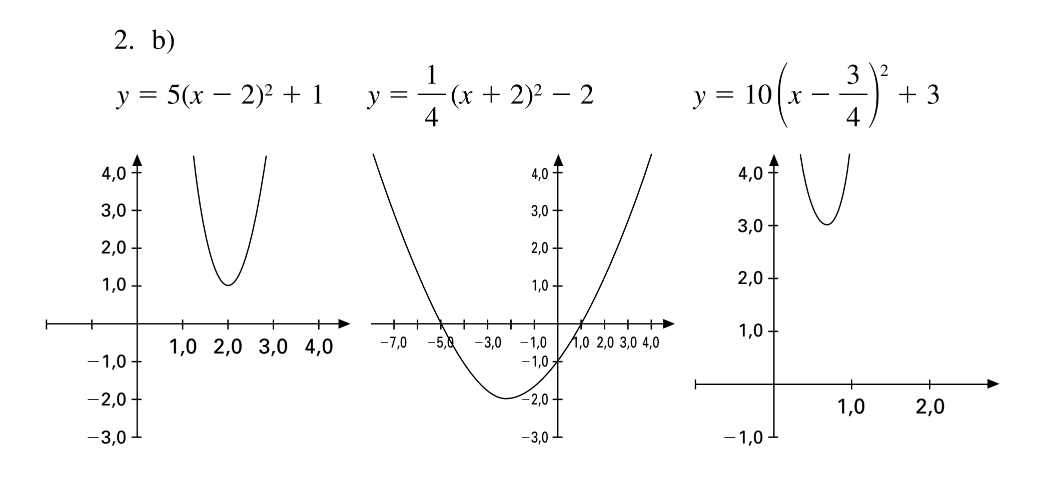
$y = \dfrac{1}{2}x + 1$ $\quad$ $y = 2x - 1$ $\quad$ $y = -100x + 3$ $\quad$ $y = \dfrac{1}{100}x + 2$

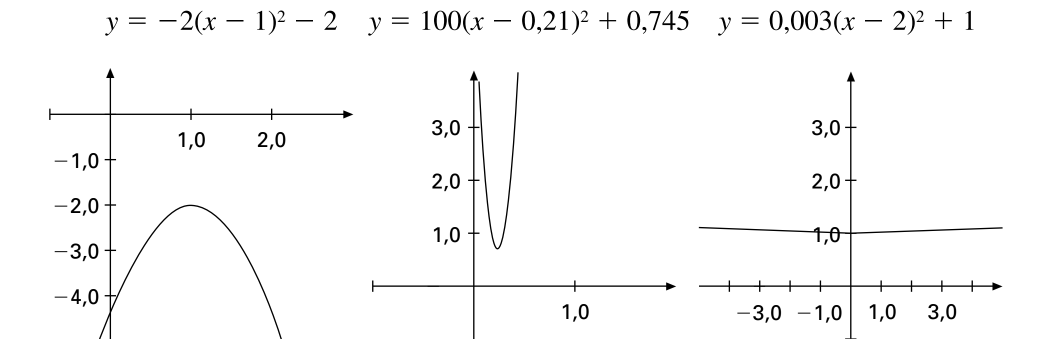


e) $y = \dfrac{|x|}{x}$

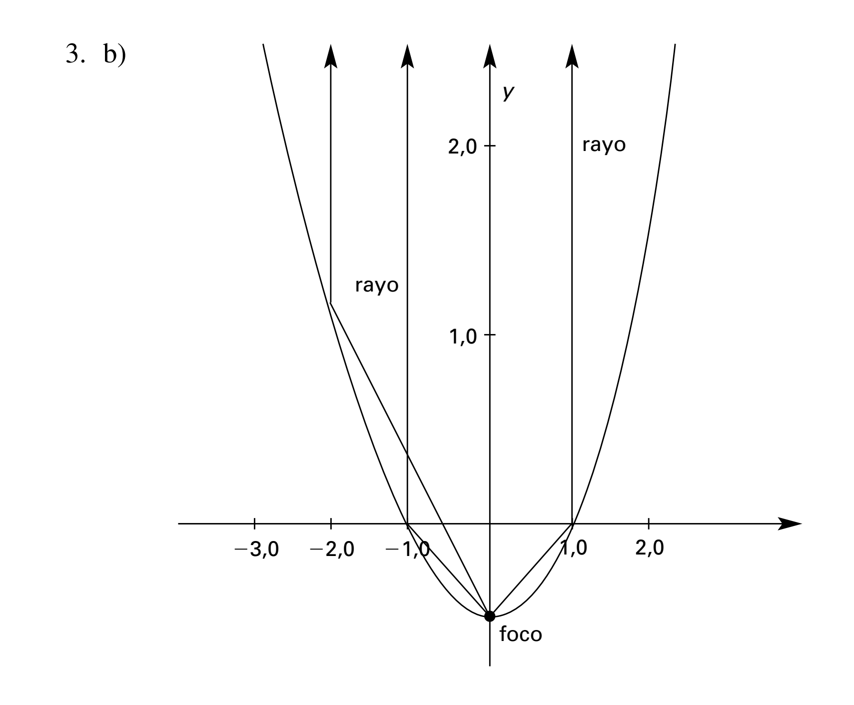


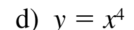
2. b)

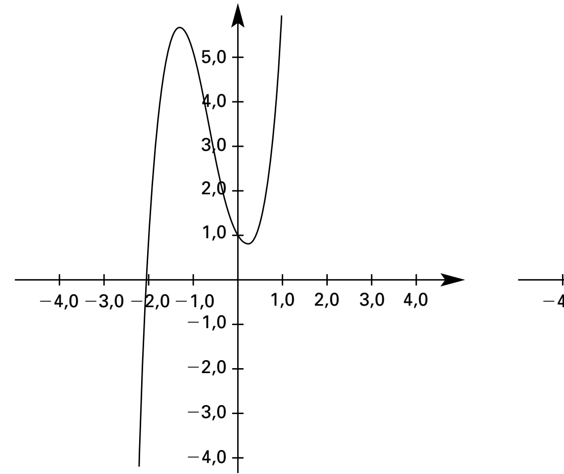

$y = 5(x - 2)^2 + 1$
$y = \frac{1}{4}(x + 2)^2 - 2$
$y = 10\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 + 3$

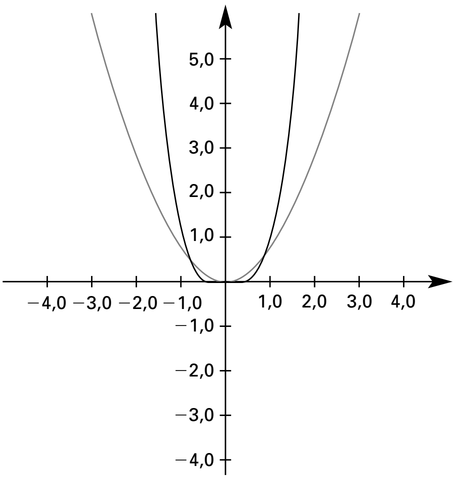

$y = -2(x - 1)^2 - 2$
$y = 100(x - 0{,}21)^2 + 0{,}745$
$y = 0{,}003(x - 2)^2 + 1$

3. b)

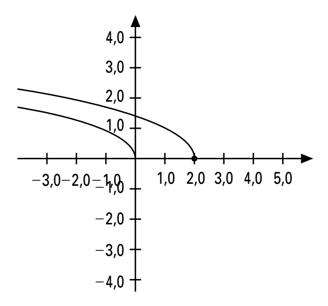

y
rayo
rayo
foco

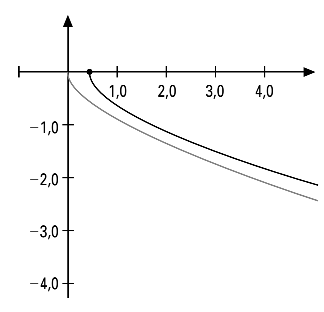
4. b) $y = 3x^3 + 5x^2 - 2x + 1$ d) 

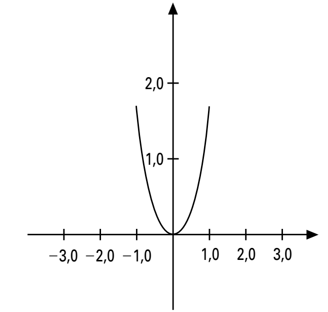




5. a) $y = \sqrt{2 - x}$ c) $y = \dfrac{-1}{2}\sqrt{3x - 1}$ e) $y = -2\sqrt{1 - x^2} + 2$

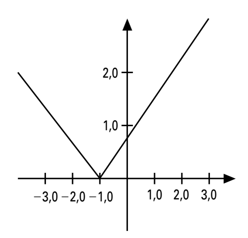


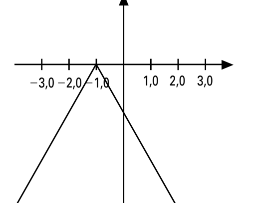


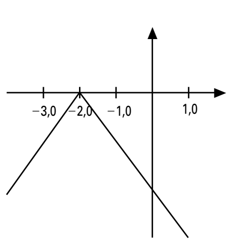


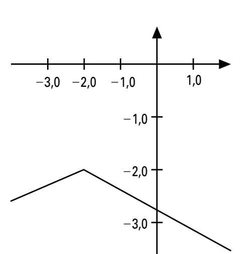
6. b)

$y = f(x)$ $y = -\dfrac{1}{2}f(x)$ $y = -\dfrac{1}{2}f(x + 1)$ $y = -\dfrac{1}{2}f(x + 1) - 2$



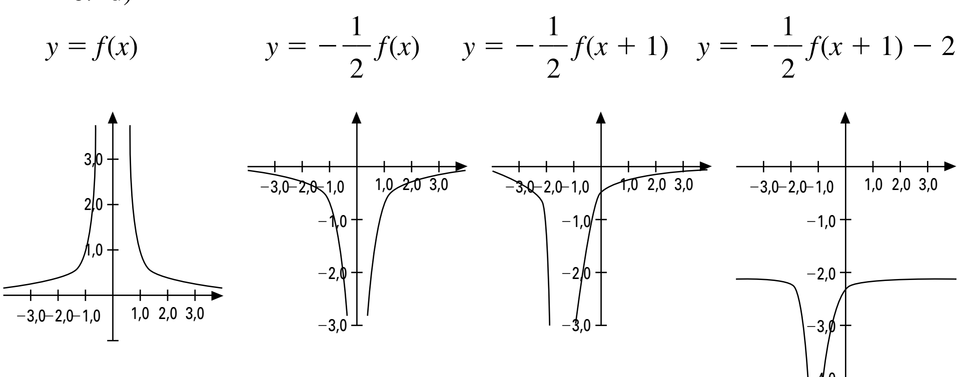




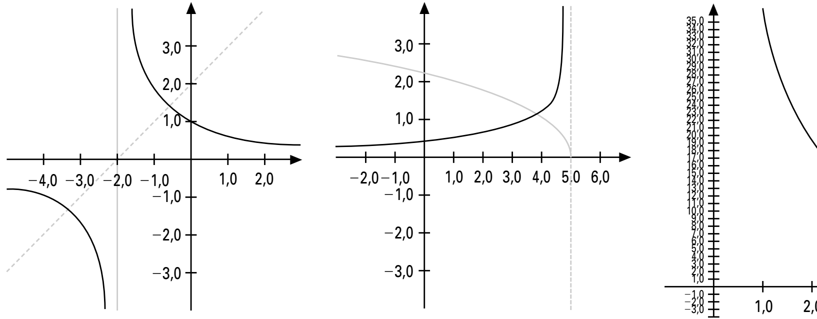


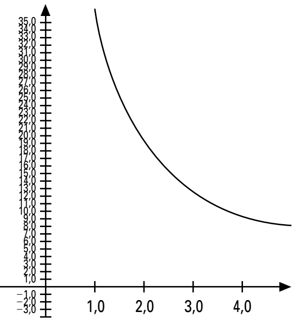
6. d)

$y = f(x)$ $\quad y = -\frac{1}{2}f(x)$ $\quad y = -\frac{1}{2}f(x+1)$ $\quad y = -\frac{1}{2}f(x+1) - 2$



7. b) $y = \dfrac{2}{x+2}$ d) $y = \dfrac{1}{\sqrt{5-x}}$ f) $y = \dfrac{36}{x}$





SECCIONES 2.4 Y 2.4.3

I. 1. a) $f + g = \sqrt{4-x} + x^2$; $D_{f+g} : (-\infty, 4]$; $f - g = \sqrt{4-x} - x^2$; $D_{f-g} : (-\infty, 4]$; $f \cdot g = \sqrt{4-x} \cdot x^2$; $D_{f \cdot g} : (-\infty, 4]$; $f/g = \dfrac{\sqrt{4-x}}{x}$; $D_{f/g} : (-\infty, 4] - \{0\}$; $f(g(x)) = \sqrt{4-x^2}$; $D_{f(g(x))} : -2 \le x \le 2$; $g(f(x)) = |4-x|$; $D_{g(f(x))} : x \le 4$

c) $f(g(0)) = \pm 2$; e) $f(g(-4)) =$ No existe; g) $f(g(4)) =$ No existe.

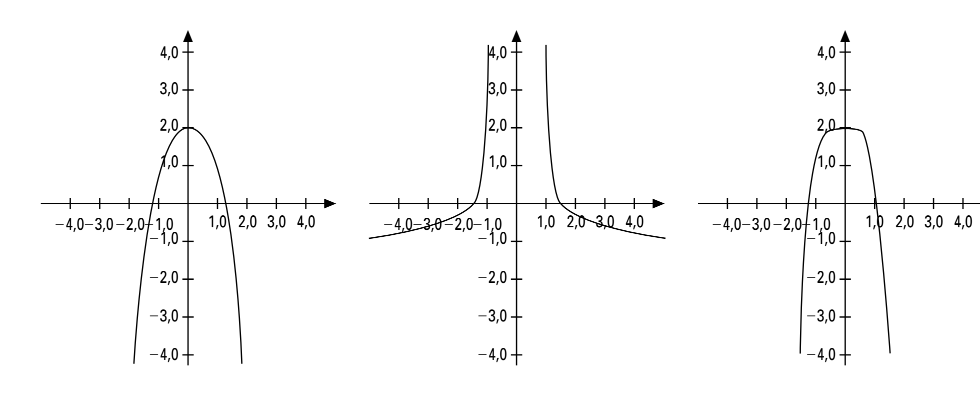
2. a) $f(g(x)) = 3x^2 - 4$; todos los reales; $g(f(x)) = 9x^2 - 6x$; todos los reales.

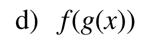
c) $f(g(x)) = \dfrac{2-x^2}{3-x^2}$; $x \ne \pm\sqrt{3}$; $g(f(x)) = \dfrac{(x+1)^2}{2x^2+4x+1}$; $x \ne -1 \pm \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

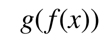
e) $f(g(x)) = 2|x+1| - 1$; $D_{f(g(x))} : [-1, \infty)$; $g(f(x)) = \sqrt{2}|x|$; $D_{g(f(x))} : (-\infty, \infty)$

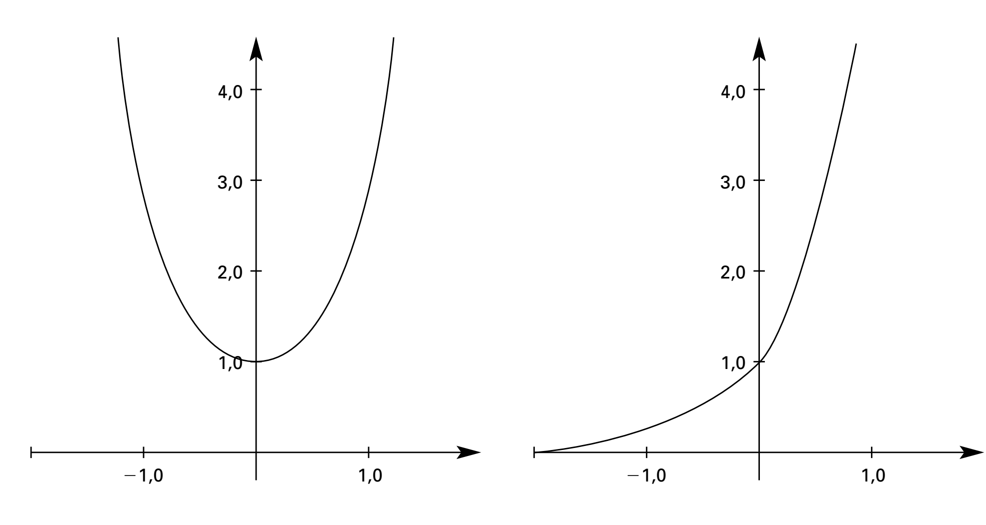
g) $f(g(x)) = \sqrt{x-5};\ x \geq 5;\ g(f(x)) = \sqrt{x-5};\ x \geq 5$

3. b) $f - g$ $\qquad \dfrac{f}{g}$ $\qquad g(f(x))$

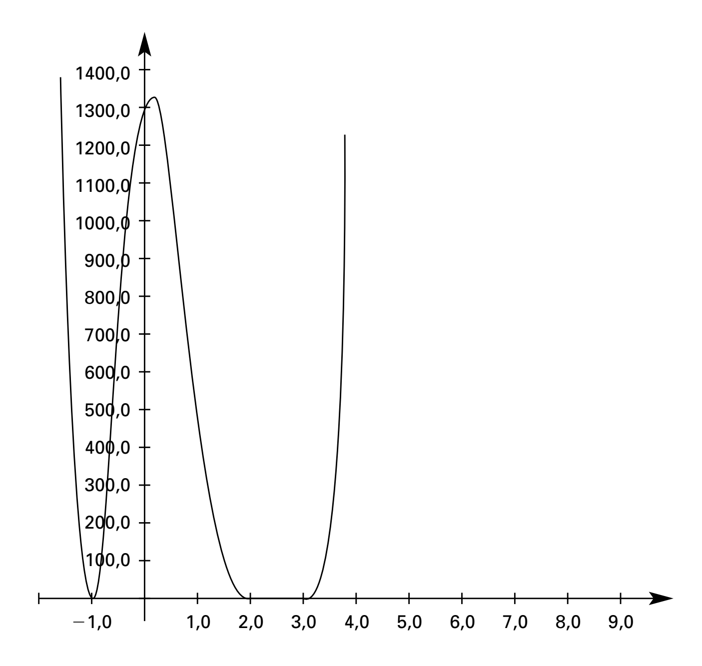



d) $f(g(x))$


$g(f(x))$



f) $g(f(x))$

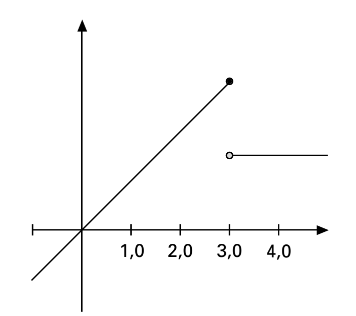


4. b) $f = \text{sen}\, x,\ \ g = 3^x$
   d) $f = 5^x;\ \ g = x - 1$

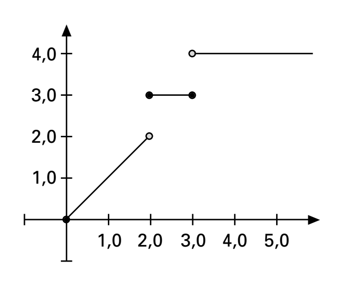
5. c) $f^{-}(x) = \sqrt{\dfrac{x+1}{3}};\ \ x \geq -1$

SECCIONES 2.5 Y 2.6

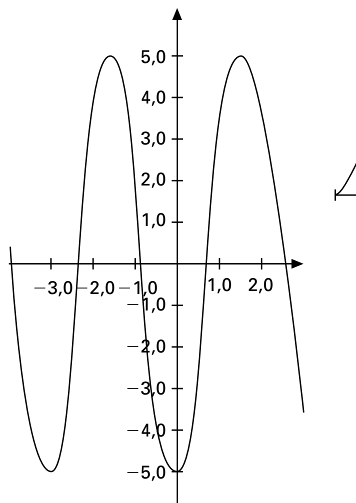
1. a) $f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \leq 3 \\ 3 & \text{si } x > 3 \end{cases}$



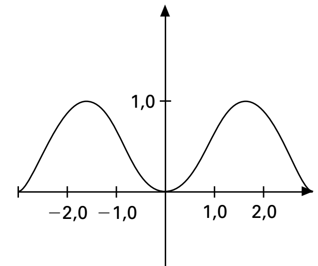
c) $h(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 \leq x < 2 \\ 3 & \text{si } 2 \leq x \leq 3 \\ 4 & \text{si } x > 2 \end{cases}$



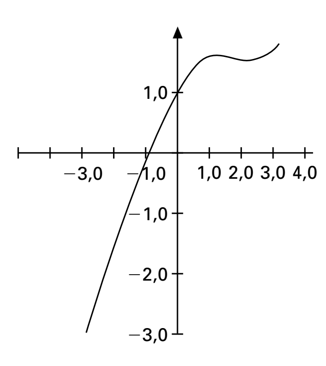
2. a) $y = -5 \cos 2x$



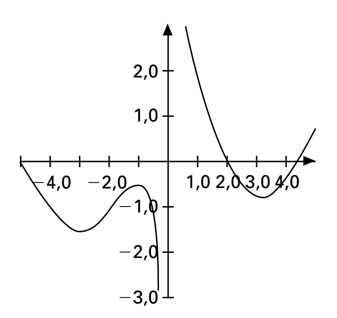
c) $y = \operatorname{sen}^2 x$



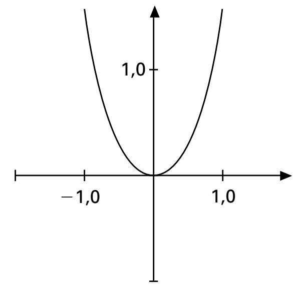
e) $y = x + \cos x$



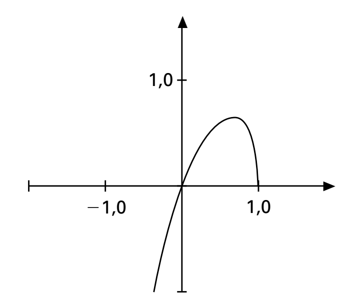
g) $y = \dfrac{1}{x} + \cos x$



i) $y = \operatorname{arcsen} x$



k) $y = \operatorname{arcsen} x \cdot \arccos x$



3. a) $y = 4 \operatorname{sen} x$; d) $y = \dfrac{1}{5} \operatorname{sen} \dfrac{1}{3}(2x - \pi)$; f) $y = 2 \operatorname{sen} 4x$

4. a) Amplitud $= 1$, periodo $= 2\pi$, fase $= \dfrac{-\pi}{4}$

c) Amplitud $= 2$, periodo $= \dfrac{\pi}{2}$, fase $= \dfrac{-\pi}{16}$

e) Amplitud $= \dfrac{1}{2}$, periodo $= \dfrac{2\pi}{3}$, fase $= \dfrac{-1}{2}$

SECCIÓN 2.7

2. b) $t = \dfrac{\ln\left(\dfrac{T-20}{80}\right)}{-0{,}138629}$; d) $f^{-1}(x) = \dfrac{1}{2}e^x$; f) $x = \dfrac{1}{5}\ln\left(\dfrac{y}{3{,}69}\right)$;
   h) $f^{-}(x) = e^{e^x}$

3. a) $c = X_0$, $k = -0{,}000123$; b) $M(t) = X_0 e^{-0{,}000123t}$; c) 18.720 años

SECCIÓN 3.1 A 3.4

1. a) 26; c) −8; e) 40; g) 1; i) 16

2. a) −2; c) 0; e) −4; g) 32; i) $\dfrac{5}{8}$; k) $\dfrac{-11}{8}$

3. a) $\varepsilon = 0{,}001$, $\delta = 0{,}0005$; c) $\delta = 0{,}0002$

5. a) 1) $A(r+\delta) = \pi(r+\delta)^2$
   2) Si $r = 2$, $\delta = 0{,}01$, $A(2{,}01) = 12{,}8183$, para $\varepsilon = 0{,}252$
   3) $A(2{,}005) = 12{,}6293$, $-0{,}005 < \delta < 0{,}005$; $-0{,}063 < \varepsilon < 0{,}063$

SECCIÓN 3.5

1. 23 3. 4 5. 13 7. $\dfrac{1}{2}$, 13. $\dfrac{-1}{2}$ 15. $\dfrac{\sqrt{14}+3}{\sqrt{2}}$

17. $\begin{cases} 27 & \text{si } x+1 \geq 0 \\ 3 & \text{si } x+1 < 0 \end{cases}$, 19. $\dfrac{\pi}{2}$ 21. 0

SECCIÓN 3.5.2

1. $\dfrac{1}{2}$ 3. $\dfrac{4}{3}$ 5. $\dfrac{-1}{20}$ 7. 1 9. $\dfrac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$

SECCIONES 3.6.1 A 3.6.3

1. a) $L = 22$, $f(x)$ es continua en $a = 3$.
   c) $L = 1$, $h(x)$ es continua en $a = 0$.
   e) $L = 7$, $p(x)$ es continua en $a = -2$.
   g) $\lim\limits_{x\to 0^-} = -1 \neq \lim\limits_{x\to 0^{+-}} = 1$, $r(x)$ es discontinua en $a = 0$.
   i) $\lim\limits_{x\to 0^-} = -1 \neq \lim\limits_{x\to 0^{+-}} = 1$, $w(x)$ es discontinua en $a = 0$.

k) $\lim\limits_{x \to 1^-} 5x^2 - 3 \neq \lim\limits_{x \to 1^+} 3x + 2$, $q(x)$ es discontinua en $a = 1$.

2. a) -2; c) 27

SECCIONES 3.7 A 3.7.7

1. a) $f(1) = 0$; c) $h(-2) = \dfrac{4}{23}$

2. a) $x \neq -1{,}3$; c) $x \neq 0$; e) $x \neq 1$; g) $x \neq -4$; i) $x \neq -2{,}0$

3. a) 5; c) $\dfrac{3}{2}$; e) cero; g) $\dfrac{-1}{10}$; i) 1; k) ∞

4. a) $y = 5$; c) $s = 8$

   e) La función del inciso a) $f(x) = \dfrac{5x - 1}{x}$, tiene una asíntota vertical en $x = 0$ y una asíntota oblicua en $y = 5$; la función $p(x) = \dfrac{6x^2 - 3}{4x^2 + 5x + 1}$, tiene asíntotas verticales en $x = -1, -\dfrac{1}{4}$ y una asíntota oblicua en $p = \dfrac{3}{2}$.

5. $f(x) = \dfrac{x - 3}{x(x - 1)(x - 2)}$

   a) En $x = 0, 1, 2$ f es discontinua al infinito.

   b) f cuenta con asíntotas verticales en $x = 0, 1, 2$.

   c) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$

   d) $\lim\limits_{x \to 1^1} f(x) = -\infty$

   e) $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \infty$

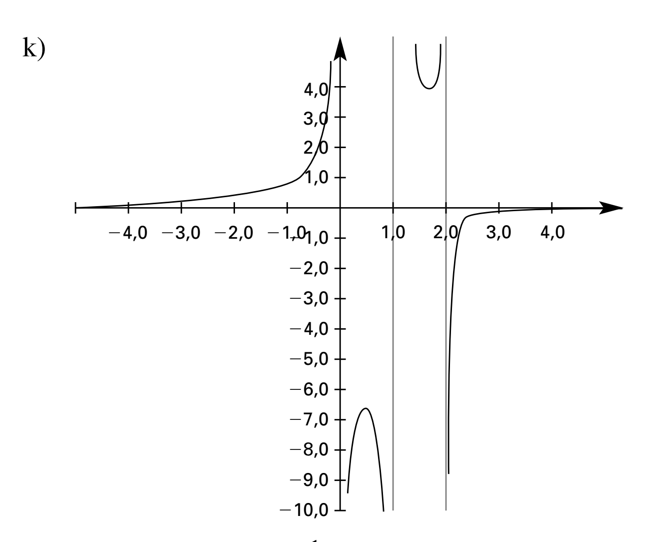
   f) $\lim\limits_{x \to 0^{-1}} f(x) = \infty$

   g) $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$

   h) $\lim\limits_{x \to 2^{-1}} f(x) = \infty$

   i) $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 0$

k)



6. a) La función $f(x) = \dfrac{1}{x - 2}$; no cruza al eje de las x; no está definida para $x = 2$, en ese valor cuenta con una asíntota vertical y tiene una asíntota horizontal en $y = 0$.

c) La función $s(x) = \dfrac{-3}{x - 1}$; no cruza al eje x, no está definida para $x = 1$, lugar donde cuenta con una asíntota vertical, tiene una asíntota horizontal en $y = 0$.

e) La función $i(x) = \dfrac{3x}{x - 4}$, cruza por el origen de coordenadas, cuenta con una asíntota vertical en $x = 4$ y una asíntota horizontal en $y = 3$.

g) La función $k(x) = \dfrac{3x - 1}{x + 2}$, cuenta con una asíntota vertical en $x = -2$ y una asíntota horizontal en $k = 3$, cruza al eje x en $x = \dfrac{1}{3}$.

i) La función $m(x) = \dfrac{-10x}{x^2 - x + 2}$ cruza por el origen de coordenadas, no cuenta con asíntotas verticales, tiene una asíntota horizontal en $m = 0$.

k) La función $p(x) = \dfrac{2x - 3}{(2x - 3)(2x + 3)}$; no cruza al eje x; cuenta con una asíntota vertical en $x = -\dfrac{3}{2}$; una asíntota horizontal en $p = 0$, y un hueco o discontinuidad en $x = \dfrac{3}{2}$.

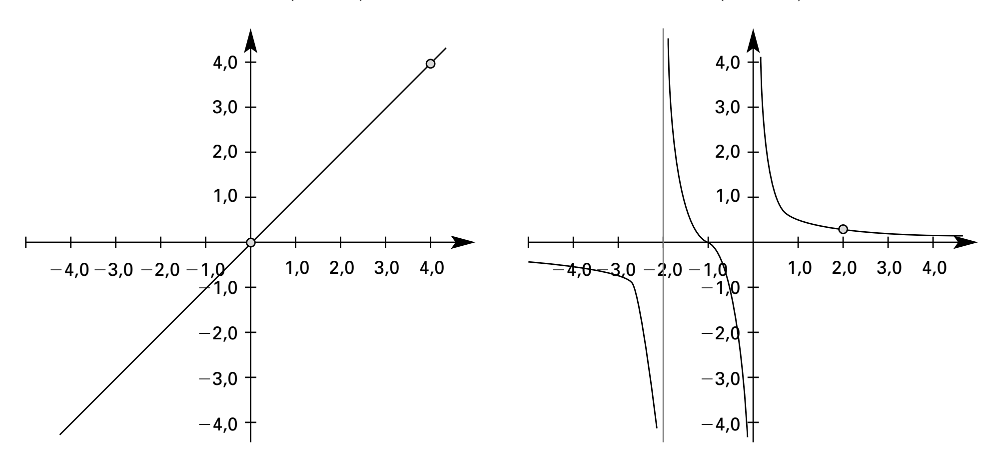
m) La función $r(x) = \dfrac{x(x - 2)}{(x + 1)(5x - 3)}$, cruza por el origen de coordenadas; cuenta con asíntotas verticales en $x = -1, \dfrac{3}{5}$ y una asíntota horizontal en $r = \dfrac{1}{5}$.

ñ) La función $u(x) = \dfrac{x^2 - x - 6}{x^2 + x + 6}$, cruza al eje x en $(-2, 0)$, tiene asíntotas verticales en $x = -3, 2$, así como una asíntota horizontal en $u = 1$.

p) La función $w(x) = \dfrac{x}{x^2 + 5x + 1}$, cuenta asíntotas verticales en $x = \dfrac{-5}{2} \pm \dfrac{\sqrt{21}}{2}$ y una asíntota horizontal en $w = 0$.

r) Gráfica de $f(x) = \dfrac{1}{x - 2}$. La gráfica de $g(x) = \dfrac{x + 3}{(x - 2)(x + 3)}$, es igual a ésta, solamente que cuenta con un hueco en el punto $\left(-3, \dfrac{-1}{5}\right)$.

7. a) $f(x) = \dfrac{x^3(x - 4)}{x^2(x - 4)}$; $x \neq 0, 4$ c) $m(x) = \dfrac{(x - 2)(x + 1)}{x(x^2 - 4)}$; $x \neq 2$



e) La razón se encuentra en que la función $p(x) = \dfrac{x}{x - 5}$ no se altera si se multiplica por $\dfrac{x - 5}{x - 5}$, es como si se multiplicara por uno, es decir como: $p(x) = \dfrac{x(x - 5)}{(x - 5)^2}$.

8. a) 2; c) 0; e) 2; g) 1,64

SECCIÓN 4.1

I. 1. $f'(x) = 5$; 3. $f'(x) = \dfrac{-11}{3\sqrt[3]{x^8}}$ 5. $f'(x) = 1 + 3\sqrt{x} + \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

II. 7. $f'(x) = 15x^2 - 8x + 3$; 9. $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} - \dfrac{1}{2\sqrt{x^3}}$; 11. $f'(x) = 8(4x - 3)$

III. 13. $y' = 70x + 2$; 15. $y' = 8x^3 - 18x$; 17. $y' = 45x^2 - 22x + 2$;

19. $y' = \dfrac{-6x}{(x+1)^2}$; 21. $y' = 1 - \dfrac{32}{(1-x)^2}$; 23. $y' = \dfrac{2}{(1-x)^2}$;

25. $y' = \dfrac{x^2 + 2x - 1}{(x+1)^2}$; 27. $y' = \dfrac{6(x-2)}{x+1}$;

29. $y' = \dfrac{\sqrt{x} + \sqrt{a} - 1}{2(\sqrt{x} + \sqrt{a})\sqrt{x(x-a)}}$; 31. $y' = p(a + bx^r)^{p-1}rbx^{r-1}$;

33. $y' = k(x^e + x^m)^{k-1}(ex^{e-1} + mx^{m-1})$; 35. $y' = 4ab$;

37. $y' = \dfrac{160x^3}{(x^4+1)^6}$; 39. $y' = \dfrac{-a(4\sqrt{x} - 1)}{2\sqrt{x}(2x - \sqrt{x})^2}$;

41. $y' = 3(2 - 15x^2)(2x - 5x^3)^2$; 43. $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{4x + \sqrt{8x^3}}}$;

45. $y' = \dfrac{3}{\sqrt{(x-2)(x+1)^3}}$; 47. $y' = \dfrac{7x - 17}{2(x+1)^2\sqrt{x^2 - 5x + 6}}$;

49. $y' = \dfrac{1}{\sqrt{(1+x)(1-x)^3}}$; 51. $y' = \dfrac{50\sqrt{x^2 + 5\sqrt{x}}}{(10\sqrt{5x} + 1)\sqrt{5 + \sqrt{5x + \sqrt{5x}}}}$

SECCIÓN 4.2

I. 1. $f'(x) = -\dfrac{2}{(\operatorname{sen} x - \cos x)^2}$; 3. $f'(x) = -\dfrac{3x^2 - 5}{\sqrt{1 - (x^3 + 5x)^2}}$;

5. $f'(x) = \dfrac{1 + x}{\sqrt{1 - x^2}}$; 7. $f'(x) = \sec^2\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)$; 9. $f'(t) = \operatorname{sen}\left(2t - \dfrac{\pi}{2}\right)$;

11. $f'(x) = 9(\cos^2 x + 2x^2 + 1)^2(-2\cos x \operatorname{sen} x + 4x)$;

13. $f'(x) = -(\ln 3)3^{\cos x} \operatorname{sen} x$; 15. $f'(x) = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)$;

17. $f'(x) = -\dfrac{\pi}{2x\sqrt{1 - \left(1 - \dfrac{\pi}{\sqrt{x}}\right)}}$; 19. $f'(x) = e^{2x}(5\cos 5x - 2\operatorname{sen} 5x)$;

21. $f'(x) = \dfrac{(1-3x)}{e^{3x}}$; 23. $f'(x) = \dfrac{x}{1+x^2} + \arctan x$;

25. $f'(x) = e^x(x^2 + 2x - 1)$; 27. $f'(x) = \dfrac{x(2\ln x - x)}{\ln^2 x}$;

29. $f'(x) = \dfrac{x\cos 5x^2}{6\sqrt{\cos 5x^2}}$; 31. $f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$;

33. $f'(x) = 3(1 + x\ln 5)x^2 5^{3x}$; 35. $f'(x) = \dfrac{3\ln^2 x}{x} - \dfrac{1}{x\ln x}$;

37. $f'(x) = \dfrac{x+1}{\sqrt{4-x^2}}$; 39. $f'(x) = 5\cosh 5x$; 41. $f'(x) = x\,\text{sech}^2\, x + \tanh x$;

45. $f'(x) = \begin{cases} 8x - 3, x \leq 0 \\ e^x, x \geq 0 \end{cases}$;

47. $f'(x) = \dfrac{(x+1)^2}{(5-x)(x-3)^4}\left[8x + 11 + \dfrac{(x+1)(2x+3)(5x+23)}{(5-x)(x-3)}\right]$;

49. $f'(x) = \dfrac{-3}{4(5-3x)} + \dfrac{x}{2(x^2+2)} + \dfrac{1}{4(x-2)}$;

51. $f'(x) = (-x\tan x + \ln\cos x)(\cos x)^x$;

53. $f'(x) = \left(\dfrac{1}{2} + \ln\sqrt{x}\right)(\sqrt{x})^x$; 55. $f'(x) = (1 + \ln x)x^x$

II. 57. $y' = -\dfrac{3}{5}$; 59. $y' = \dfrac{-2}{3}\dfrac{x}{\sqrt{9-x^2}}$; 61. $y' = -\sqrt{\dfrac{5}{x}} + 1$;

63. y' es indeterminada de la forma $\dfrac{0}{0}$; 65. $y' = 0$

III. 67. $y' = \dfrac{4}{5\sqrt[5]{x-1}}$; $y'(1) = \dfrac{1}{0}$, la derivada no existe para $x = 1$;

69. $y' = \dfrac{m(x-a)^{m-1}}{n(y-b)^{n-1}}$, y' no existe para $y = b$.

IV. 71. Ecuación de la tangente: $y - 2 = \dfrac{1}{4}(x - 5)$;

ecuación de la normal $y - 2 = -4(x - 5)$

73. Ecuación de la tangente $y - 10 = 16(x - 2)$;

ecuación de la normal $y - 10 = \frac{-1}{16}(x - 2)$

V. 75. $x = \frac{5}{4}, y = \frac{-25}{8}$; 77. $x = 0, y = 1$

SECCIONES 5.1 Y 5.2

I. 1. $\frac{dr}{dt} = 0{,}0000088$ cm/h; 3. $\frac{dA}{dt} = 0{,}048$ cm^2/h;

5. a) La base de la escalera se desliza sobre el muro a velocidad $\frac{dy}{dt} = 0{,}262$ m/min;

b) Las velocidades $\frac{dy}{dt}$ y $\frac{dx}{dt}$ serán iguales cuando $x = 10\sqrt{2}$;

c) t = 0,51 seg

7. $\frac{d(F_1PF_2)}{dt} = 0{,}04$ cm/s (considere que la distancia de cada foco al punto $P(x, y)$ es la misma y $\frac{dx}{dt} = 0{,}03$ m/s);

9. Se pide resolver la variación de z, siendo esta última la distancia que separa a las dos personas, y x, y las distancias que recorren ambas, donde, y usando ley de cosenos: $z^2 = (100)^2 + (x + y)^2 - 2(100)(x + y)\cos 120°$; quedando $\frac{dz}{dt} = -6{,}7$ km/h;

11. $\frac{dV}{dt} = \frac{17}{3}\pi \frac{\text{cm}}{\text{m}}$;

13. $\frac{dz}{dt} \approx 13{,}11$ km/h (use, como en el problema 9, ley de cosenos).

II. 15. $x = 0, x = 5{,}6a, x = -1{,}6a$; 17. $x = 0, x = \frac{3a}{4}$; 19. $x = 1$;

21. $x = \frac{2n + 1}{2}\pi$;

23. $s'(t) = -12t + 20, s''(t) = -12, s'(1) = 8, s'(3) = |-16|$;

25. $s'(t) = 1{,}2t^2 - 8t$, $s''(t) = 2{,}4t - 8$, $s'(1) = |-6{,}8|$, $s'(3) = |-13{,}2|$;

27. $s'(t) = 1 - \dfrac{1}{t^2}$, $s'(1) = 0$, $s'(3) = \dfrac{8}{9}$;

29. $s'(t) = 0{,}6t + 2$, $s'(1) = 0{,}6$, $s'(3) = 1{,}8$;

31. La pelota tarda 1,65 seg, en llegar a la altura máxima; al bajar, pasa a la altura del edificio a una velocidad de $-6{,}19$ m/s; impacta en el suelo a los 4,02 seg, con una velocidad de $-2{,}34$ m/s.

33. La aceleración es constante, es decir, $s''(t) = -9{,}8$; la pelota alcanza la máxima altura a los 3,57 seg; impacta en el suelo a los 7,14 seg, con una velocidad de $-34{,}97$ m/s.

SECCIONES 5.3 Y 5.4

I. 1. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{\operatorname{tg} x}{\ln\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)} = \infty$ (la indeterminación permanece aún después de derivar);

3. cero;

5. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln x}{(1-x)^3} = \infty$ (la indeterminación permanece aún después de derivar);

7. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$; 9. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\cos x}{x} = |1|$;

11. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{x^3 - 7x + 6} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{3x^2 - 4x - 1}{3x^2 - 7} = \dfrac{-2}{-4} = \dfrac{1}{2}$; 13. ∞

II. 15. Las dimensiones de la caja son: 12,5992 cm, 12,5992 cm y 25,1984 cm.

17. La base x debe medir $x = 3{,}04$ m y la altura y, $y = 1{,}27$ m, luego el perímetro total es de 7,08 m.

III. 19. $$\begin{cases} P = \overline{AC} \cdot \overline{CB} = \overline{AC} \cdot (\overline{AB} - \overline{AC}) = \overline{AC} \cdot \overline{AB} - \overline{AC}^2 \\ P' = \overline{AB} - 2\overline{AC} \\ \overline{AC} = \dfrac{\overline{AB}}{2} \quad \overline{CB} = \dfrac{\overline{AB}}{2} \\ P'' = -2 \therefore \text{Producto máximo} \end{cases}$$

21. Las dimensiones del cilindro, en términos del radio r de la esfera, son: radio $= \sqrt{\frac{2}{3}}r$; altura $= \frac{2}{\sqrt{3}}r$; $V_{máx} = \frac{4\sqrt{3}}{9}r^3$.

23. $x = 1{,}278$, $y = 0{,}438$; 25. $V_{máx} = \frac{32\pi r^3}{81}$; 27. $\beta = 31{,}65°$;

29. a) $x = 0{,}596$; b) $\alpha = 16{,}57°$, $\beta = 16{,}79°$;

c) $\frac{\text{sen } \alpha}{\text{sen } \beta} = 0{,}987$, distancia recorrida $= 5{,}22$;

31. $r = 3{,}493$ cm, $h = 6{,}986$ cm, $V_{máx} = 286{,}71$ cm^3

SECCIÓN 5.5

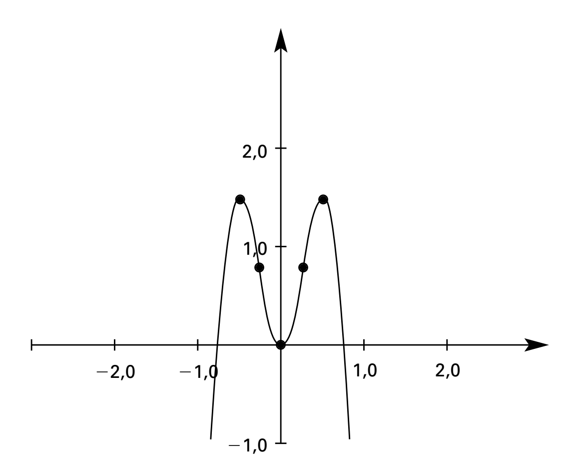
I. 1. $I[1, 4]$, Mínimo en $x = \frac{5}{2}$, $y = \frac{-9}{4}$;

3. $I[0, 1]$, Mínimo en $x = \frac{2}{3}$, $y = \frac{-4}{27}$;

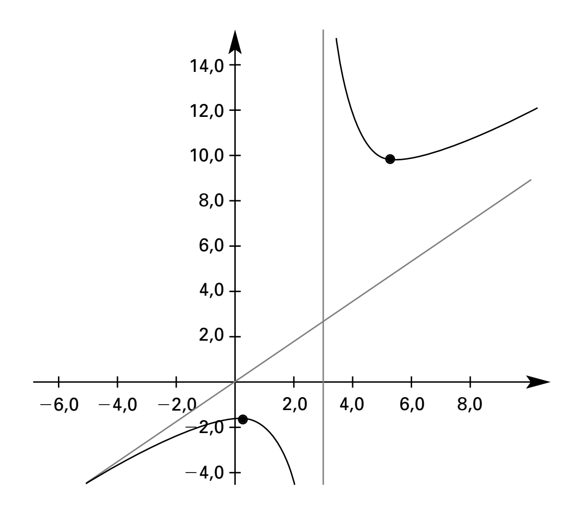
5. $I[0, \pi]$, $[\pi, 2\pi]$, Máximo en $x = \frac{\pi}{2}$, $y = 1$, Mínimo en $x = \frac{3\pi}{2}$, $y = -1$;

7. $I[-1, 0]$, Máximo en $x = -0{,}63$, $y = 0{,}48$.

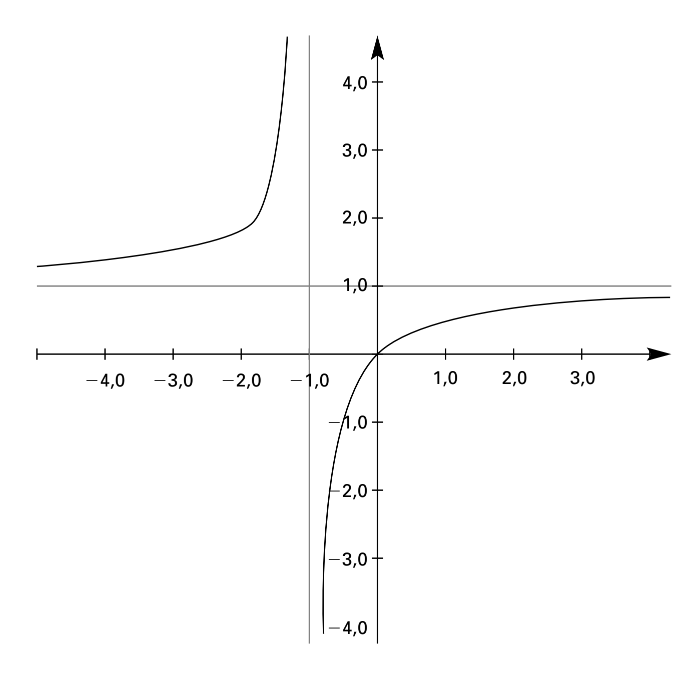
III. 17. La función $y = 12x^2 - 24x^4$ crece de $\left(-\infty, \frac{-1}{2}\right)$ a $\left(0, \frac{1}{2}\right)$, decrece en $\left(\frac{-1}{2}, 0\right)$ y $\left(\frac{1}{2}, \infty\right)$ tiene máximos en $x = \pm\frac{1}{2}$, $y = \frac{3}{2}$, un mínimo en $x = 0$, $y = 0$; puntos de inflexión en $x = \pm 0{,}28$, $y = \frac{5}{6}$; cóncava hacia abajo en $(-\infty, -0{,}28)$, $(0{,}28, \infty)$; cóncava hacia arriba en $(-0{,}28, 0{,}28)$. Es una función par simétrica respecto al eje y, continua en su dominio, es decir, en todos los reales.



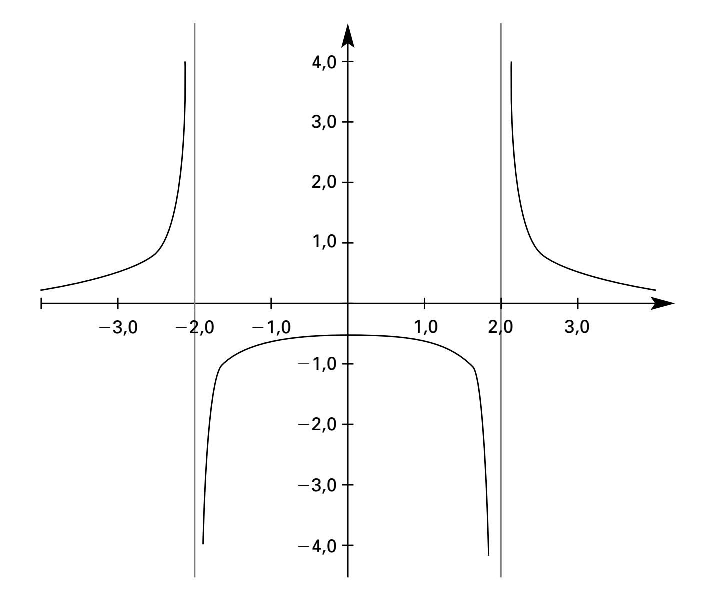
19. La función $y = \dfrac{x^2 - 2x + 5}{x - 3}$, cuenta con un máximo en (0,17, −1,65), un mínimo en (5,83, 9,65); asíntota vertical en $x = 3$; asíntota oblicua en $y = x$. Crece de $(-\infty, 0{,}17)$ y $(5{,}83, \infty)$, decrece en (0,17, 3) y (3, 5,83); cóncava hacia arriba en $(3, \infty)$, cóncava hacia abajo en $(-\infty, 3)$. Es simétrica respecto a las asíntotas vertical y oblicua.



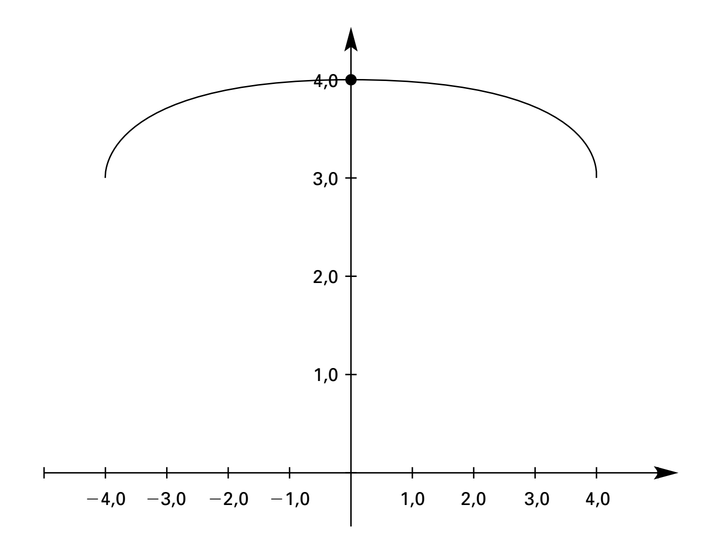
21. La función $y = \dfrac{x}{x + 1}$, no cuenta con máximos, mínimos ni puntos de inflexión. Está definida en todos los reales menos en $x = -1$, abscisa donde tiene una asíntota vertical; cuenta con una asíntota horizontal en $y = 1$. Crece de $(-\infty, 2)$, es cóncava hacia arriba en ese mismo intervalo; decrece de $(-2, \infty)$, siendo cóncava hacia abajo en ese mismo intervalo.



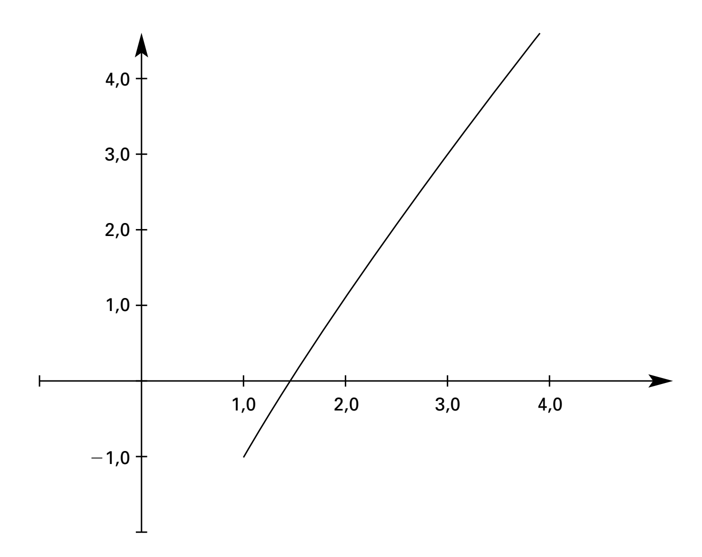
23. La función $y = \dfrac{2}{x^2 - 4}$, cuenta con un máximo en $x = 0$, $y = \dfrac{-1}{2}$; asíntotas verticales en $x = \pm 2$, asíntota horizontal en $y = 0$. Crece en $(-\infty, -2)$, $(-2, 0)$, decrece en $(0, 2)$, $(2, \infty)$; cóncava hacia arriba en $(-\infty, -2)$ y $(2, \infty)$, cóncava hacia abajo en $(-2, 2)$. Simétrica respecto al eje *y*.



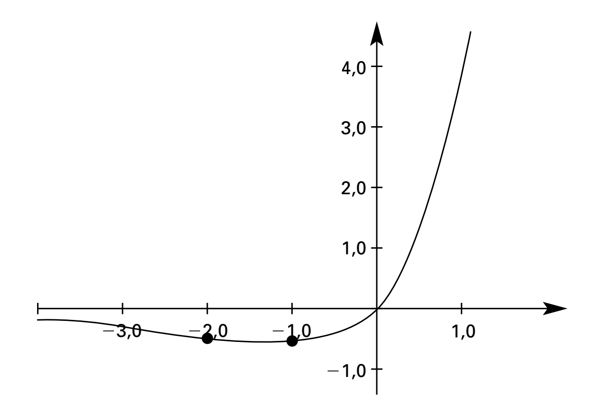
25. La función $y\sqrt{4 + x} + \sqrt{4 - x}$, cuenta con un máximo en $x = 0$, $y = 4$, es cóncava hacia abajo en $[-4, 4]$, el cual es, además, su dominio. Crece de $(-4, 0)$, decrece en $(0, 4)$.



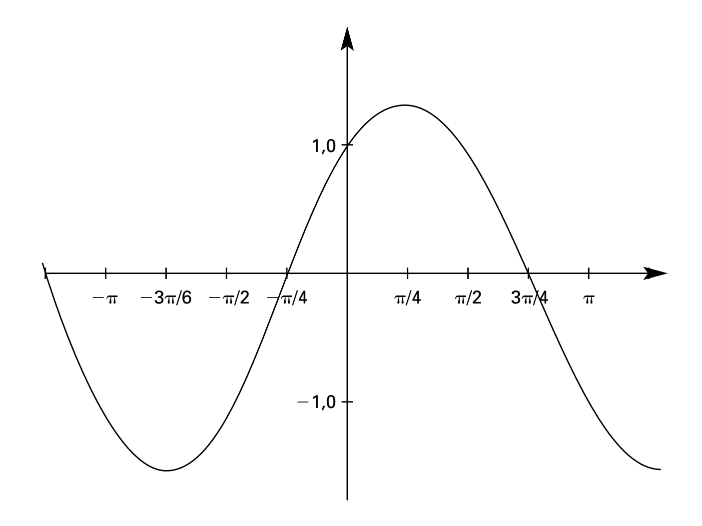
27. La función $y = (x - 2) + \sqrt[3]{(x - 1)^2}$ tiene por dominio el intervalo $[1, \infty)$, crece, solamente, en ese mismo intervalo, y es cóncava hacia abajo, inclusive.



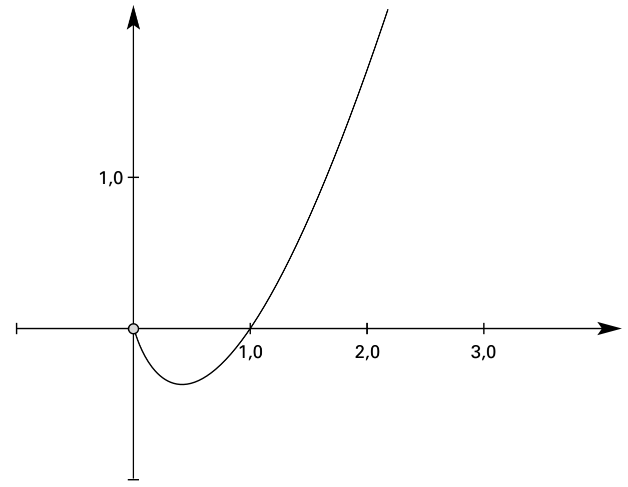
29. La función $y = xe^x$, cuenta con un mínimo en $x = -1$, $y = -0{,}36$, un punto de inflexión en $x = -2$, $y = -0{,}27$. Decrece de $(-\infty, -1)$, crece en $(-1, \infty)$; cóncava hacia abajo en $(-\infty, -2)$, cóncava hacia arriba en $(-2, \infty)$.



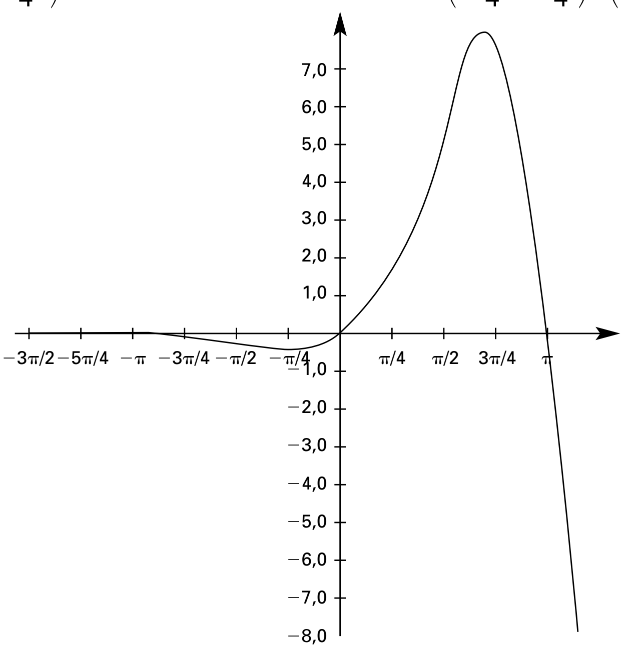
31. La función $y = \cos x + \operatorname{sen} x$, tiene valores máximos en $x = \dots -\frac{7\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{9\pi}{4}, \dots, y = 1{,}4$; mínimos en $x = \dots -\frac{11\pi}{4}, -\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \dots, y = -1{,}4$; puntos de inflexión en $x = \dots -\frac{5\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \dots, y = 0$. Crece en $\dots, \left(-\frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right), \left(\frac{5\pi}{4}, \frac{9\pi}{4}\right), \dots$ Decrece en $\dots, \left(-\frac{7\pi}{4}, -\frac{3\pi}{4}\right), \left(\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right), \dots$



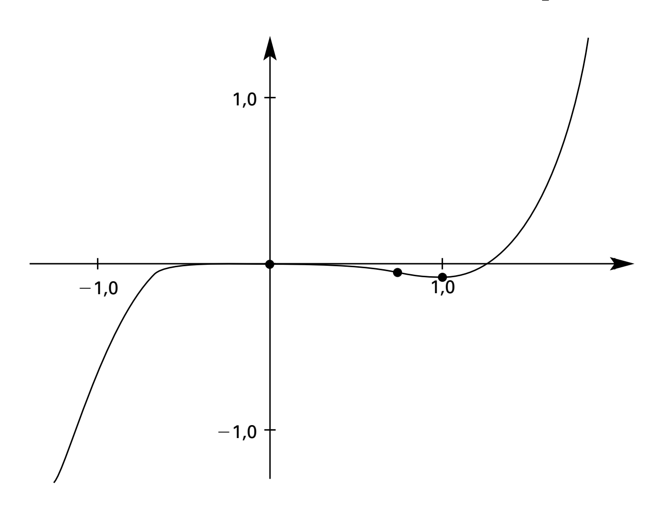
33. $y = x \ln x$, cuenta con un mínimo en $x = \dfrac{1}{e} = 0{,}36$, $y = -0{,}02$ decrece en $(0, -0{,}02)$, crece en $(-0{,}02, \infty)$; dominio $(0, \infty)$, intervalo en el cual es cóncava hacia arriba; tiene un hueco en $x = 0$, $y = 0$.



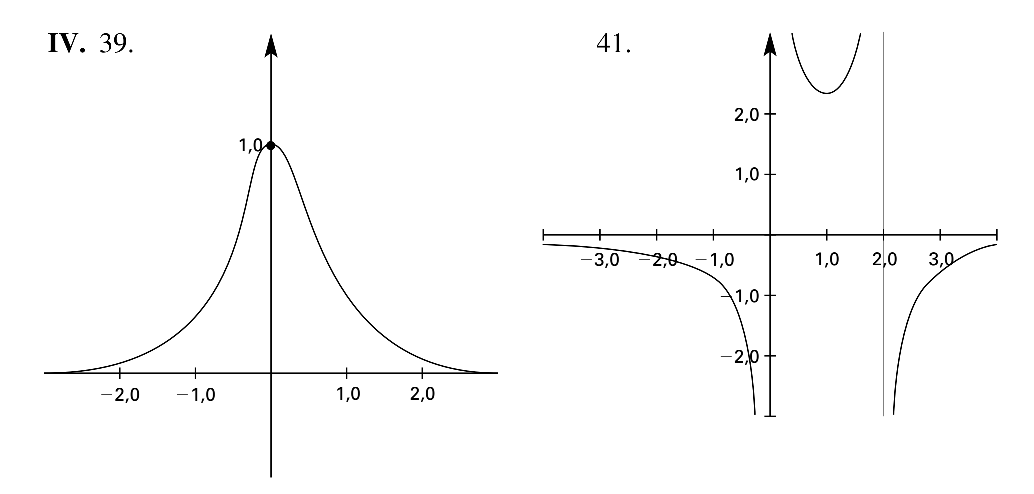
35. La función $y = e^x$ sen x, tiene valores mínimos en $x = \dots \dfrac{-\pi}{4}, \dfrac{7\pi}{4}, \dots$; máximos en $x = \dots \dfrac{-5\pi}{4}, \dfrac{3\pi}{4}, \dots$, puntos de inflexión en $x = \dots \dfrac{-7\pi}{4}, \dfrac{-3\pi}{4}, \dfrac{\pi}{4}, \dots$; cóncava hacia abajo en el intervalo $\dots \left(\dfrac{-7\pi}{4}, \dfrac{-3\pi}{4}\right), \left(\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{5\pi}{4}\right), \dots$, cóncava hacia arriba en $\dots \left(\dfrac{-3\pi}{4}, \dfrac{\pi}{4}\right), \left(\dfrac{5\pi}{4}, \dfrac{9\pi}{4}\right), \dots$



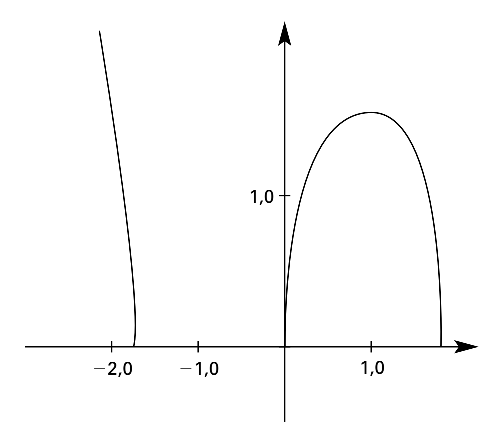
37. $y = \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{4}x^4$; la función cuenta con un máximo en $x = 0$, $y = 0$, un mínimo en $\left(1, \frac{1}{20}\right)$, punto de inflexión en (0,75, −0,032). Crece de $(-\infty, 0)$ y de $(1, \infty)$, decrece en (0, 1); cóncava hacia abajo en $(-\infty, 0{,}75)$, cóncava hacia arriba en $(0{,}75, \infty)$. Tiene por dominio todos los reales. La regla de la segunda derivada falla para verificar que en $x = 0$ hay un máximo, luego, hay que confirmar esto último sólo con el criterio de la primera derivada.



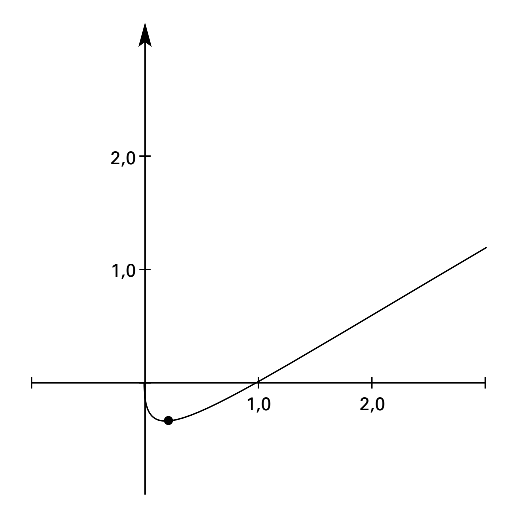
IV. 39. 41.



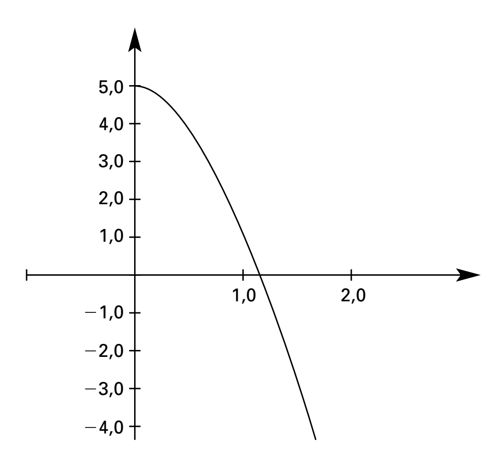
43. La función $y = \sqrt{3x - x^3}$, tiene por dominio los intervalos $[-\infty, -\sqrt{3}]$, $[0, \sqrt{3}]$, cuenta con un máximo en $x = 1$, $y = \sqrt{2}$; tiene tres puntos de inflexión tangencial en $x = 0$, $y = 0$ y $x = \pm\sqrt{3}$, $y = 0$. Decrece en $(-\infty, -\sqrt{3})$, $(1, \sqrt{3})$, crece en $(0, 1)$; es cóncava hacia abajo en su dominio.



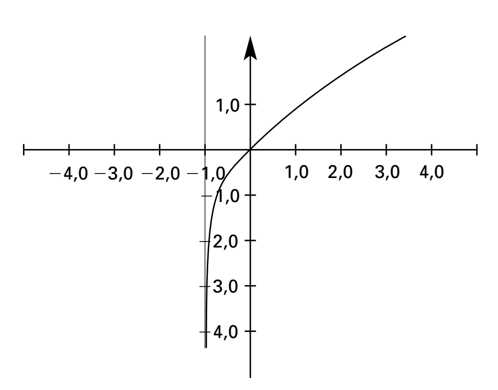
45. La función $y = x - \sqrt[3]{x}$, tiene por dominio el intervalo $[0, \infty)$; decrece en $(0, 1)$, crece en $(1, \infty)$; cuenta con un mínimo en $x = 0{,}19$, $y = -0{,}38$, tiene un punto de inflexión vertical en $x = 0$; es cóncava hacia arriba en todo su dominio.



47. La función $y = 4 - 4\sqrt[3]{x^4}$, cuenta con un extremo absoluto en $x = 0$, $y = 5$, su dominio está en el intervalo $[0, \infty)$, es cóncava hacia abajo en todo su dominio.



49. La función $y = \dfrac{x}{\sqrt[3]{x+1}}$, crece y es cóncava hacia abajo en todo su dominio, es decir: $(0, \infty)$, cuenta con una asíntota vertical en $x = -1$.



SOLUCIONES A LOS PROBLEMAS DEL CAPÍTULO 6

I. 1. $\dfrac{1}{a+x} = \dfrac{1}{x} - \dfrac{a}{x^2} + \dfrac{2a^2}{x^3} + \ldots$; 3. $\dfrac{1}{\sqrt{5-x^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(1 + x^2 + 2x^4 + \ldots)$

II. 5. $\sqrt{x+1} = 1 + \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{8}x^2 + \ldots$; 7. $\dfrac{1}{1+x^2} = 1 + x^2 - x^4 + x^6 - \ldots$

III. 11. $\sec x = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5}{24}x^4 + \ldots$; 13. $\operatorname{cosec} x = x^{-1} + \frac{x}{6} - \frac{x^3}{84} + \ldots$;

15. $e^{\sqrt{2x}} = 1 + \sqrt{2x} + x + \frac{(\sqrt{2x})^3}{3!} + \ldots$;

17. $\operatorname{sen}(x^2) = x^2 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} - \frac{x^{14}}{7!} + \ldots$;

19. $\ln(1 - x) = \frac{-x}{1} - \frac{x^2}{2} - \ldots$; 21. $\frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \ldots$

23. $\frac{1}{1 + x - x^2} = 1 - x + 2x^2 - 3x^3 + \ldots$;

25. $\operatorname{sen}^2 x = x^2 - \frac{x^4}{3} + \frac{1}{90}x^6 - \ldots$

26. $a^x = 1 + (\ln a)x + \frac{(\ln^2 a)x^2}{2} + \frac{(\ln^3 a)x^2}{3!} + \ldots$;

29. $\ln \frac{1 + x}{1 - x} = 2\left(\frac{x}{1} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots\right)$

IV. 35. No se puede precisar.

37. Converge para $x < 1$.

39. $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots$

41. $\frac{1}{1 + x} = 1 - x + x^2 - \ldots$

ÍNDICE DE TÉRMINOS